

# Diversifikation und Korrelation - ein nur scheinbarer Zusammenhang?

Anregungen zu einer kontroversen Diskussion

DAV vor Ort  
Hamburg, 4.12.2013  
(überarbeitete Fassung: 13.07.2015)

Dietmar Pfeifer

Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik

# Agenda

1. Einführung
2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße
3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas
4. Korrelation und Diversifikation
5. Tailabhängigkeit und Diversifikation
6. Erweiterungen für höhere Dimensionen
7. Zusammenfassung und Fazit
8. Literatur

## 1. Einführung

“By **diversifiable** we mean that if a risk category can be segmented [...] into risk classes and the risk charge of the total risk is not higher than the sum of the risk charges of each subrisk, then we have the **effect of diversification** [...]. This effect can be measured as the difference between the sum of several capital charges and the total capital charge when **dependency** between them is taken into account.”

[Sandström (2011), p. 120f.]

## 1. Einführung

“**Diversification** arises when different activities complement each other, in the field of both return and risk. [...] The **diversification effect** is calculated by using **correlation factors**. Correlations are statistical measures assessing the extent to which events could occur simultaneously. [...] A correlation factor of 1 implies that certain events will always occur simultaneously. Hence, there is no diversification effect and two risks identically add up. Risk managers tend to say that such risks are perfectly correlated (i.e., they have a high correlation factor), meaning that these two risks do not actually diversify at all. **A correlation factor of 0 implies that diversification effects are present and a certain diversification benefit holds.**”

[Doff (2011), p. 249f.]

## 1. Einführung

“Although it is an old idea, the measurement and allocation of **diversification** in portfolios of asset and / or liability risks is a difficult problem, which has so far found many answers. The **diversification effect** of a portfolio of risks is the difference between the sum of the risk measures of stand-alone risks in the portfolio and the risk measure of all risks in the portfolio taken together, which is typically non-negative, at least for **positive dependent risks**.”

[Hürlimann (2009a), p. 325]

## 1. Einführung

“ ‘Diversification effects’ means the reduction in the risk exposure of insurance and reinsurance undertakings and groups related to the diversification of their business, resulting from the fact that the **adverse outcome from one risk can be offset by a more favourable outcome from another risk, where those risks are not fully correlated**. The Basic Solvency Capital Requirement shall comprise individual risk modules, which are aggregated [...] The **correlation coefficients** for the aggregation of the risk modules [...], shall result in an overall Solvency Capital Requirement [...] Where appropriate, **diversification effects** shall be taken into account in the design of each risk module.”

[Directive 2009/138/EC, (64) p. 7; (37) p. 24; Article 104, p. 52]

## 1. Einführung

“Diversifikationseffekte: eine Reduzierung des Gefährdungspotenzials von Versicherungsunternehmen und -gruppen durch die Diversifizierung ihrer Geschäftstätigkeit, die sich aus der **Tatsache** ergibt, dass das negative Resultat eines Risikos durch das günstigere Resultat eines anderen Risikos **ausgeglichen werden kann, wenn diese Risiken nicht voll korreliert sind.**”

[Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1.4.2015, § 7 Begriffsbestimmungen, Nr. 5; in: Bundesgesetzblatt Jahrgang 2015 Teil I Nr. 14, S. 441, ausgegeben zu Bonn am 10. April 2015]

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Sei  $\mathfrak{X}$  ein konvexer Kegel nicht-negativer Zufallsvariablen  $X$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Ein Risikomaß  $R$  auf  $\mathfrak{X}$  ist eine Abbildung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit den folgenden Eigenschaften:

$P^X = P^Y \Rightarrow R(X) = R(Y)$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}$  [Verteilungsinvarianz]

$R(cX) = cR(X)$  für alle  $X \in \mathfrak{X}$  und  $c \geq 0$  [Skaleninvarianz]

$R(X + c) = R(X) + c$  für alle  $X \in \mathfrak{X}$  und  $c \geq 0$  [Translationsinvarianz]

$R(X) \leq R(Y)$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}$  mit  $X \leq_{st} Y$  [Monotonie]

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Ein Risikomaß heißt *kohärent*, wenn zusätzlich gilt:

$$R(X + Y) \leq R(X) + R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \quad \text{[Subadditivität]}$$

Diese Ungleichung induziert einen *Diversifikationseffekt* für beliebige Risiken  $X_1, \dots, X_n$  (abhängig oder nicht), denn es folgt mit vollständiger Induktion:

$$R\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \leq \sum_{k=1}^n R(X_k) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Im Folgenden werden wir den Term “(Risiko-)Konzentrationseffekt” im Gegensatz zum “Diversifikationseffekt” benutzen, charakterisiert durch die umgekehrte Ungleichung

$$R(X + Y) > R(X) + R(Y) \quad \text{für gewisse } X, Y \in \mathfrak{X}.$$

Das populäre Standardabweichungsprinzip *SDP* (das auch in der Tarifierung verwendet wird) ist gegeben durch

$$SDP(X) = E(X) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X)} \quad \text{für ein festes } \gamma > 0 \text{ und } X \in \mathfrak{X} = \mathfrak{L}_+^2(\Omega, \mathcal{A}, P),$$

die Menge der quadratisch integrierbaren Risiken auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

*SDP* ist aber *kein* Risikomaß, da es *nicht monoton* ist (erfüllt aber alle anderen Bedingungen).

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

*Subadditivität* des Standardabweichungsprinzips:

$$\begin{aligned}
 SDP(X + Y) &= E(X + Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X + Y)} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Korr}(X, Y) \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\
 &\leq E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{(\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)})^2} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma (\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)}) = SDP(X) + SDP(Y)
 \end{aligned}$$

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

*Nicht-Monotonie* des Standardabweichungsprinzips:

Risiken  $X, Y$  mit Dichten

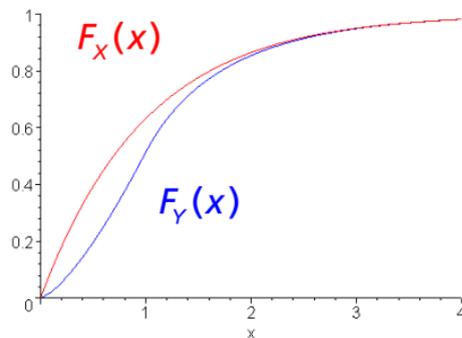
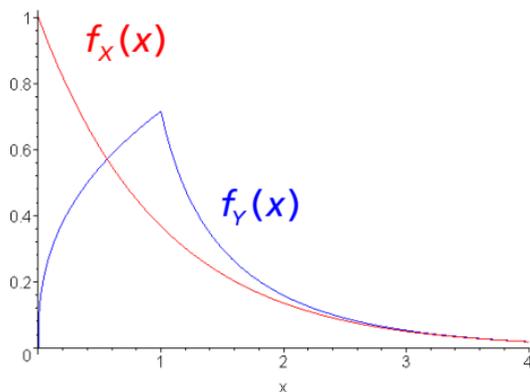
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad f_Y(x) = \begin{cases} ax^b, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-2e^{-x}}}, & x > 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } a = \frac{1}{\sqrt{e(e-2)}} = 0.7156\dots, \quad b = \frac{3-e}{e-2} = 0.3922\dots$$

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

*Nicht-Monotonie* des Standardabweichungsprinzips:

Hier gilt  $X \leq_{st} Y$  mit  $E(X) = \sigma(X) = 1$ ,  $E(Y) = 1.2003\dots$ ,  $\sigma(Y) = 0.9294\dots$



Für  $\gamma = 3$  ergibt sich:  $SDP(X) = 4 > 3.9887\dots = SDP(Y)$ .

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das in Basel II/III und Solvency II verwendete Risikomaß ist der Value-at-Risk **VaR**, definiert als Quantil der Risiko-Verteilung:

$$\text{VaR}_\alpha(X) := Q_X(1 - \alpha) \quad \text{für } X \in \mathfrak{X} \text{ und } 0 < \alpha < 1,$$

wobei  $Q_X$  die Quantilfunktion bezeichnet:

$$Q_X(u) := \inf \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq u\} \quad \text{für } 0 < u < 1.$$

**VaR** ist ein Risikomaß, aber im Allgemeinen *nicht kohärent*.

## 2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das "kleinste" kohärente Risikomaß oberhalb des **VaR** ist der Expected Shortfall (auch *average Value-at-Risk*) **ES**, der gegeben ist durch

$$ES_{\alpha}(X) := \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} VaR_u(X) du \quad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

Falls  $P(X \geq VaR_{\alpha}(X)) = \alpha$  gilt, entspricht dies dem Ausdruck

$$ES_{\alpha}(X) = E(X | X \geq VaR_{\alpha}(X)).$$

### 3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

Eine Copula  $C$  ist im Wesentlichen eine multivariate Verteilungsfunktion mit (stetig) uniformen Randverteilungsfunktionen über dem Intervall  $[0,1]$ .

Jede Copula  $C$  ist durch die sogenannten Fréchet-Hoeffding-Schranken eingeschachtelt, d.h. es gilt

$$C_*(\mathbf{u}) := \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq C^*(\mathbf{u}) := \min(u_1, \dots, u_n).$$

Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C^*$  ist selbst eine Copula (in jeder Dimension); die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C_*$  ist nur in zwei Dimensionen eine Copula.

### 3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

**Sklar's Theorem:** Sei  $H$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$ . Dann existiert eine Copula  $C$  derart, dass für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Wenn alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, ist die Copula eindeutig bestimmt. Umgekehrt gilt: bezeichnen  $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$  die generalisierten Inversen der Randverteilungsfunktionen (Quantilfunktionen), so gilt für alle  $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ :

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

### 3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

Bezeichnet  $X$  eine beliebige Zufallsvariable, so gilt:

Der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, X, \dots, X)$  mit  $n$  Komponenten besitzt die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C^*$  als Copula.

Der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, -X)$  mit zwei Komponenten besitzt die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C_*$  als Copula.

Ist  $X$  positiv, so besitzt auch der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = \left(X, \frac{1}{X}\right)$  die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C_*$  als Copula.

### 3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

Zufallsvektoren, die  $C^*$  oder  $C_*$  als Copula besitzen, heißen *komonoton* bzw. *kontramonoton*.

Allgemein gilt:

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, Y)$  ist *komonoton* genau dann, wenn es eine Zufallsvariable  $Z$  und *gleichsinnig wachsende* Funktionen  $f, g$  gibt, so dass  $X = f(Z)$  und  $Y = g(Z)$  ist.

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, Y)$  ist *kontramonoton* genau dann, wenn es eine Zufallsvariable  $Z$  und Funktionen  $f, g$  gibt, die *gegensinnig wachsen*, so dass  $X = f(Z)$  und  $Y = g(Z)$  ist.

### 3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

Zufallsvektoren, die  $C^*$  oder  $C_*$  als Copula besitzen, heißen *komonoton* bzw. *kontramonoton*.

Allgemein gilt:

Die Korrelation  $\rho(X, Y)$  ist *maximal* genau dann, wenn  $\mathbf{X} = (X, Y)$  *komonoton* ist. Sie beträgt 1, wenn  $X$  und  $Y$  positiv linear abhängig sind.

Die Korrelation  $\rho(X, Y)$  ist *minimal* genau dann, wenn  $\mathbf{X} = (X, Y)$  *kontramonoton* ist. Sie beträgt  $-1$ , wenn  $X$  und  $Y$  negativ linear abhängig sind.

## 4. Korrelation und Diversifikation

**Beispiel A1.** Die gemeinsame Verteilung der Risiken  $X$  und  $Y$  sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$P(X = x, Y = y)$		$x$			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
$y$	0	$\beta$	$0.440 - \beta$	0.000	0.440	0.440
	40	$0.554 - \beta$	$\beta$	0.001	0.555	<b>0.995</b>
	50	0.000	0.001	0.004	0.005	1.000
$P(X = x)$		0.554	0.441	0.005		
$P(X \leq x)$		0.554	<b>0.995</b>	1.000		

mit  $0 \leq \beta \leq 0.440$ . Es gilt:  $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$ ,  $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$  (für  $\alpha = 0.005$ ).

## 4. Korrelation und Diversifikation

Für die Momente von  $X$  und  $Y$  erhält man ( $\sigma$  bezeichne die Standardabweichung):

$E(X)$	$E(Y)$	$\sigma(X)$	$\sigma(Y)$	$\rho(\beta) = \rho(X, Y)$
22.550	22.450	25.377	19.912	$-0.9494 + 3.9579\beta$

Die insgesamt möglichen Risiko-Korrelationen liegen damit im Intervall  $[-0.9494; 0.7921]$ , wobei eine Korrelation von Null für  $\beta = 0.2399$  angenommen wird.

## 4. Korrelation und Diversifikation

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summen-Risikos  $S = X + Y$ :

$s$	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	$\beta$	$0.554 - \beta$	$0.440 - \beta$	$\beta$	0.001	0.001	0.004
$P(S \leq s)$	$\beta$	0.554	$0.994 - \beta$	0.994	<b>0.995</b>	0.996	1.000

Damit liegt eine *Risikokonzentration* vor wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) = 100 > 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

unabhängig vom Parameter  $\beta$  und daher auch unabhängig von den möglichen (positiven wie negativen) Korrelationen zwischen  $X$  und  $Y$ !

Ähnliche Beispiele lassen sich auch bei Risikodiversifikation konstruieren.

## 4. Korrelation und Diversifikation

**Beispiel A2.** Die gemeinsame Verteilung der Risiken  $X$  und  $Y$  sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$P(X = x, Y = y)$		$x$			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
$y$	0	$\beta$	$0.440 - \beta$	0.000	0.440	0.440
	40	$0.554 - \beta$	$0.001 + \beta$	0.000	0.555	<b>0.995</b>
	50	0.000	0.000	0.005	0.005	1.000
$P(X = x)$		0.554	0.441	0.005		
$P(X \leq x)$		0.554	<b>0.995</b>	1.000		

mit  $0 \leq \beta \leq 0.440$ . Es gilt:  $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$ ,  $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$  (für  $\alpha = 0.005$ ).

## 4. Korrelation und Diversifikation

For die Momente von  $X$  und  $Y$  erhält man ( $\sigma$  bezeichne die Standardabweichung):

$E(X)$	$E(Y)$	$\sigma(X)$	$\sigma(Y)$	$\rho(\beta) = \rho(X, Y)$
22.550	22.450	25.377	19.912	$-0.9484 + 3.9579\beta$

Die insgesamt möglichen Risiko-Korrelationen liegen damit im Intervall  $[-0.9484; 0.7931]$ , wobei eine Korrelation von Null für  $\beta = 0.2397$  angenommen wird.

## 4. Korrelation und Diversifikation

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summen-Risikos  $S = X + Y$ :

$s$	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	$\beta$	$0.554 - \beta$	$0.440 - \beta$	$0.001 + \beta$	0.000	0.000	0.005
$P(S \leq s)$	$\beta$	0.554	$0.994 - \beta$	<b>0.995</b>	<b>0.995</b>	<b>0.995</b>	1.000

Damit liegt eine (unechte) *Risikodiversifikation* vor wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) = 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

unabhängig vom Parameter  $\beta$  und daher auch unabhängig von den möglichen (positiven wie negativen) Korrelationen zwischen  $X$  und  $Y$ !

## 4. Korrelation und Diversifikation

**Beispiel A3.** Die gemeinsame Verteilung der Risiken  $X$  und  $Y$  sei durch die folgende Tabelle gegeben (kontramotoner Fall):

$P(X = x, Y = y)$		$x$			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
$y$	0	0.000	0.435	0.005	0.440	0.440
	40	0.549	0.006	0.000	0.555	0.995
	50	0.005	0.000	0.000	0.005	1.000
$P(X = x)$		0.554	0.441	0.005		
$P(X \leq x)$		0.554	0.995	1.000		

Es gilt:  $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$ ,  $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$  (für  $\alpha = 0.005$ ) und  $\rho(X, Y) = -0.9781$ .

## 4. Korrelation und Diversifikation

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summen-Risikos  $S = X + Y$ :

$s$	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	0.000	0.549	0.440	0.006	0.005	0.000	0.000
$P(S \leq s)$	0.000	0.549	0.989	0.995	1.000	1.000	1.000

Damit liegt wieder eine (unechte) *Risikodiversifikation* vor wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) = 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

was zeigt, dass der kontramontone Fall nicht unbedingt zu einer echten Risikodiversifikation führt.

## 4. Korrelation und Diversifikation

**Beispiel A4.** Die gemeinsame Verteilung der Risiken  $X$  und  $Y$  sei durch die folgende Tabelle gegeben (komonotoner Fall):

$P(X = x, Y = y)$		$x$			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
$y$	0	0.440	0.000	0.000	0.440	0.440
	40	0.114	0.441	0.000	0.555	<b>0.995</b>
	50	0.000	0.000	0.005	0.005	1.000
$P(X = x)$		0.554	0.441	0.005		
$P(X \leq x)$		0.554	<b>0.995</b>	1.000		

Es gilt:  $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$ ,  $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$  (für  $\alpha = 0.005$ ) und  $\rho(X, Y) = 0.7931$ .

## 4. Korrelation und Diversifikation

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summen-Risikos  $S = X + Y$ :

$s$	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	0.440	0.114	0.000	0.441	0.000	0.000	0.005
$P(S \leq s)$	0.440	0.554	0.554	0.995	0.995	0.995	1.000

Damit liegt wieder eine (unechte) *Risikodiversifikation* vor wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) = 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

was zeigt, dass der komontone Fall nicht unbedingt zu einer echten Risikokonzentration führt.

## 4. Korrelation und Diversifikation

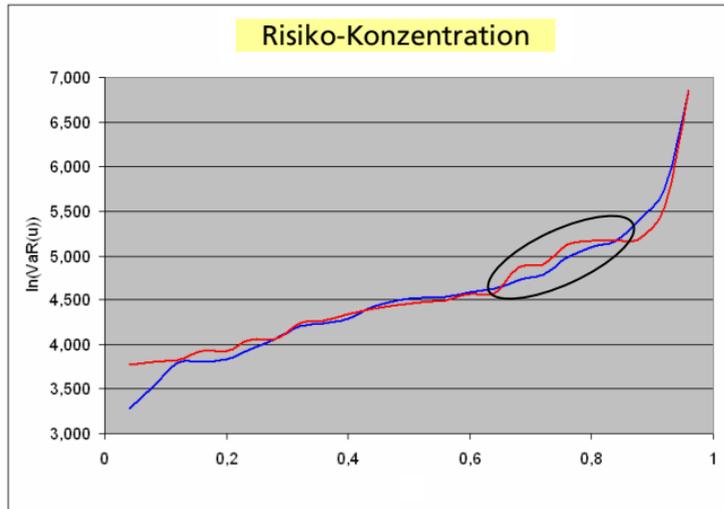
### Beispiel A5. Reale Schäden aus einem Nat-Cat Portfolio:

Jahr	Lob 1	Lob 2	Summe S	$u$	VaR Lob1( $u$ )	VaR Lob2( $u$ )	VaR Lob1( $u$ ) + VaR Lob2( $u$ )	VaR S( $u$ )
1	40,513	44,650	85,163	0,04	13,954	12,673	26,627	43,582
2	16,968	28,874	45,842	0,08	14,987	19,016	34,003	44,594
3	45,337	51,018	96,355	0,12	16,960	27,470	44,430	45,842
4	57,120	19,016	76,136	0,16	16,968	27,634	44,602	50,810
5	41,480	27,470	68,950	0,20	17,489	28,595	46,084	50,823
6	14,987	28,595	43,582	0,24	22,750	28,874	51,624	57,342
7	74,524	101,544	176,068	0,28	24,574	33,260	57,834	57,834
8	64,578	111,933	176,511	0,32	30,014	36,856	66,870	68,950
9	42,072	92,727	134,799	0,36	30,745	38,252	68,997	71,211
10	24,574	33,260	57,834	0,40	33,055	39,853	72,908	76,136
11	177,842	81,139	258,981	0,44	38,150	44,650	82,800	81,720
12	17,489	39,853	57,342	0,48	40,513	48,461	88,974	85,163
13	70,719	60,297	131,016	0,52	40,667	50,975	91,642	86,999
14	30,014	56,985	86,999	0,56	41,480	51,018	92,498	89,443
15	40,667	140,794	181,461	0,60	42,072	55,663	97,735	96,355
16	112,692	55,663	168,355	0,64	45,337	56,985	102,322	96,417
17	13,954	36,856	50,810	0,68	51,191	60,297	111,488	131,016
18	30,745	50,975	81,720	0,72	57,120	63,362	120,482	134,799
19	38,150	12,673	50,823	0,76	64,578	81,139	145,717	168,355
20	668,552	276,521	945,073	0,80	70,719	92,727	163,446	176,068
21	22,750	48,461	71,211	0,84	74,524	101,544	176,068	176,511
22	16,960	27,634	44,594	0,88	112,692	111,933	224,625	181,461
23	33,055	63,362	96,417	0,92	177,842	140,794	318,636	258,981
24	51,191	38,252	89,443	0,96	668,552	276,521	945,073	945,073

Risiko-  
Konzentration

## 4. Korrelation und Diversifikation

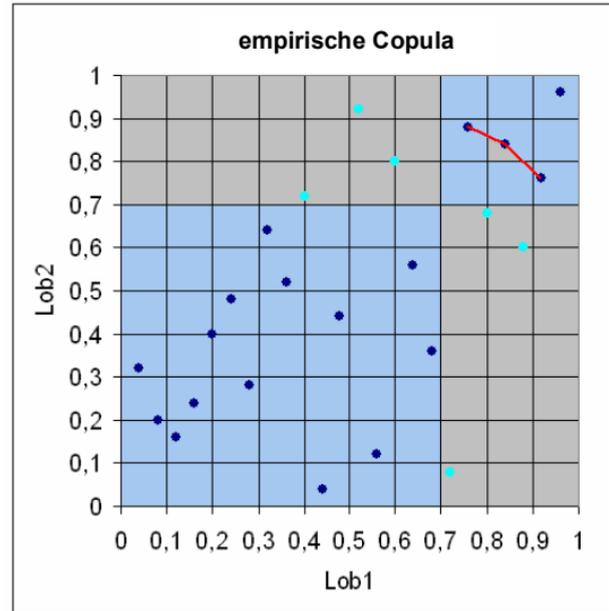
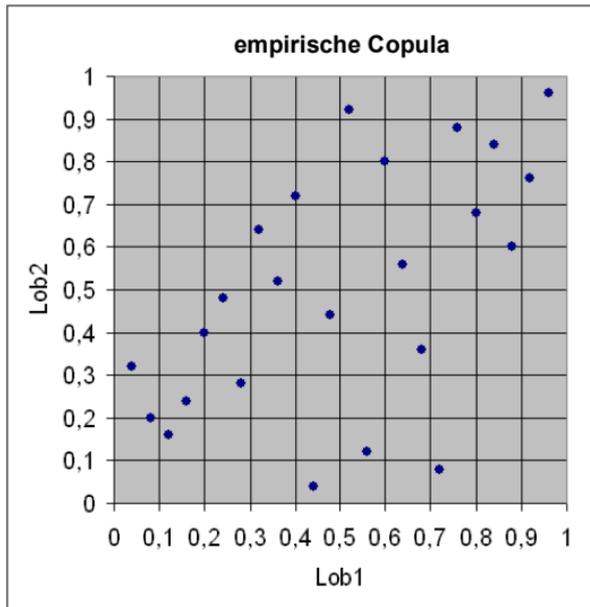
### Beispiel A5. Reale Schäden aus einem Nat-Cat Portfolio:



rot:  $\text{VaR } S(u)$ , blau:  $\text{VaR Lob1}(u) + \text{VaR Lob2}(u)$

## 4. Korrelation und Diversifikation

### Beispiel A5. Reale Schäden aus einem Nat-Cat Portfolio:



## 4. Korrelation und Diversifikation

**Proposition A.**  $X$  und  $Y$  seien Risiken mit den stetigen Verteilungsfunktionen  $F_X$  bzw.  $F_Y$ , die auf ihrem jeweiligen Träger streng monoton wachsend seien. Für festes  $\alpha \in (0,1)$  sei

$$Q^*(\alpha, \delta) := \min\{Q_X(u) + Q_Y(2 - \alpha - \delta - u) \mid 1 - \alpha - \delta \leq u \leq 1\} \quad \text{für } 0 \leq \delta < 1 - \alpha.$$

Dann existiert ein genügend kleines  $\varepsilon \in (0, 1 - \alpha)$  mit

$$Q^*(\alpha, \varepsilon) > Q_X(1 - \alpha) + Q_Y(1 - \alpha) = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y).$$

Ferner sei angenommen, dass der Zufallsvektor  $(U, V)$  eine Copula  $C$  als gemeinsame Verteilungsfunktion besitze mit

## 4. Korrelation und Diversifikation

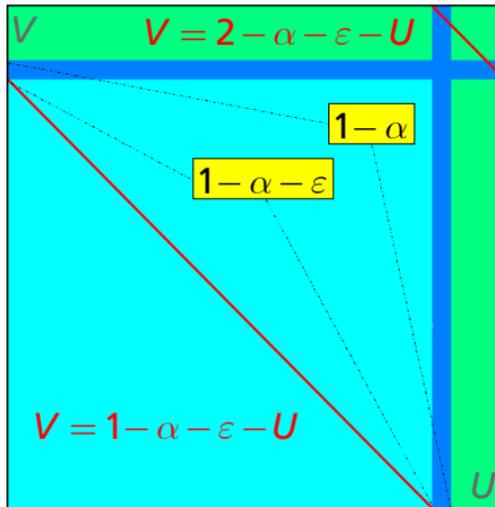
$$V < 1 - \alpha - \varepsilon \Leftrightarrow U < 1 - \alpha - \varepsilon \quad \text{und} \quad V = 2 - \alpha - \varepsilon - U \Leftrightarrow U \geq 1 - \alpha - \varepsilon.$$

Wenn wir  $X^* := Q_X(U)$ ,  $Y^* := Q_Y(V)$ ,  $S^* := X^* + Y^*$ , definieren, dann besitzt  $(X^*, Y^*)$  die gleichen Randverteilungen wie  $(X, Y)$ , und es gilt

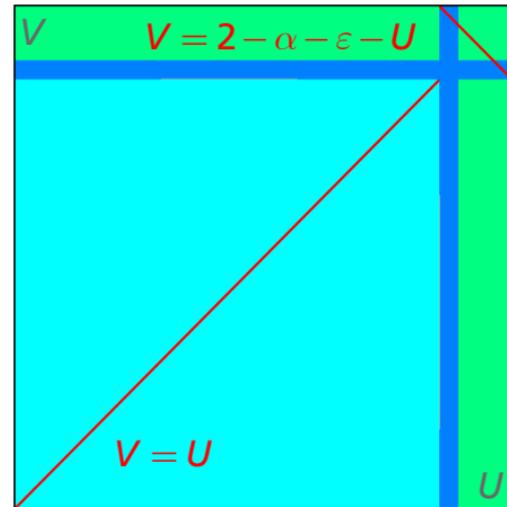
$$\text{VaR}_\alpha(X^* + Y^*) \geq Q^*(\alpha, \varepsilon) > \text{VaR}_\alpha(X^*) + \text{VaR}_\alpha(Y^*) = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

d.h. es liegt ein Risiko-Konzentrationseffekt vor. Ferner gilt: die Korrelation  $\rho(X^*, Y^*)$  ist minimal wenn  $V = 1 - \alpha - \varepsilon - U$  für  $U < 1 - \alpha - \varepsilon$  (untere extremale Copula  $\underline{C}$ ) und maximal wenn  $V = U$  für  $U < 1 - \alpha - \varepsilon$  (obere extremale Copula  $\bar{C}$ ).

## 4. Korrelation und Diversifikation



untere extremale Copula  $\underline{C}$



obere extremale Copula  $\bar{C}$

## 4. Korrelation und Diversifikation

**Beispiel B.** Die Risiken  $X$  und  $Y$  mögen der gleichen Lognormalverteilung

$\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$  mit  $\sigma > 0$  genügen, was insbesondere  $E(X) = E(Y) = 1$  be-

deutet.

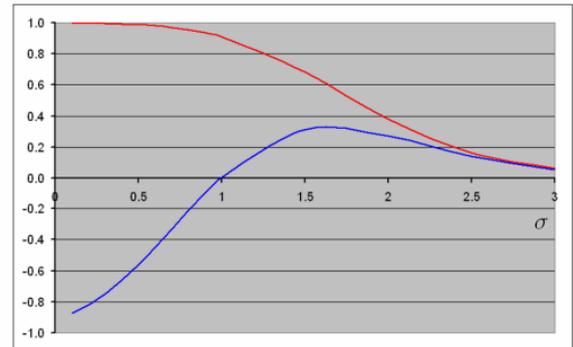
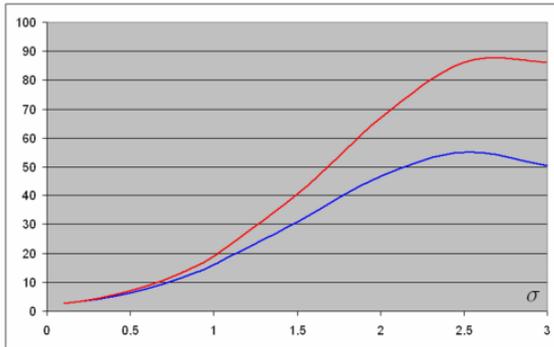
Die folgende Tabelle zeigt einige numerische Ergebnisse für die extremalen Copulas  $\underline{C}$  und  $\bar{C}$  in Proposition A, insbesondere die maximal mögliche Spanne der dadurch induzierten Korrelationen. Gemäß dem Solvency II-Standard sei  $\alpha = 0.005$  gewählt (und  $\varepsilon = 0.001$ , was hier ausreicht).

## 4. Korrelation und Diversifikation

$\sigma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(Y)$	1.2873	1.6408	2.0704	2.5866	3.1992	3.9177	4.7497
$\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$	2.5746	3.2816	4.1408	5.1732	6.3984	7.8354	9.4994
$\text{VaR}_\alpha(X^* + Y^*)$	2.6205	3.3994	4.3661	5.5520	6.9901	8.7134	10.7537
$\rho_{\min}(X^*, Y^*)$	-0.8719	-0.8212	-0.7503	-0.6620	-0.5598	-0.4480	-0.3310
$\rho_{\max}(X^*, Y^*)$	0.9976	0.9969	0.9951	0.9920	0.9873	0.9802	0.9700

$$P^X = P^Y = \mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

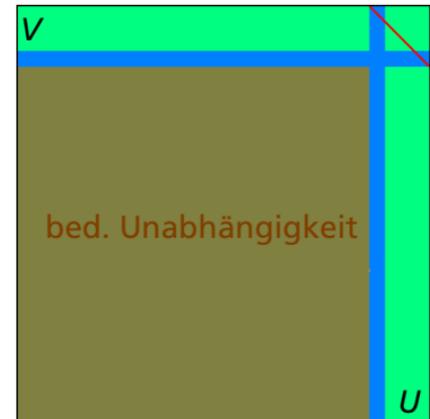
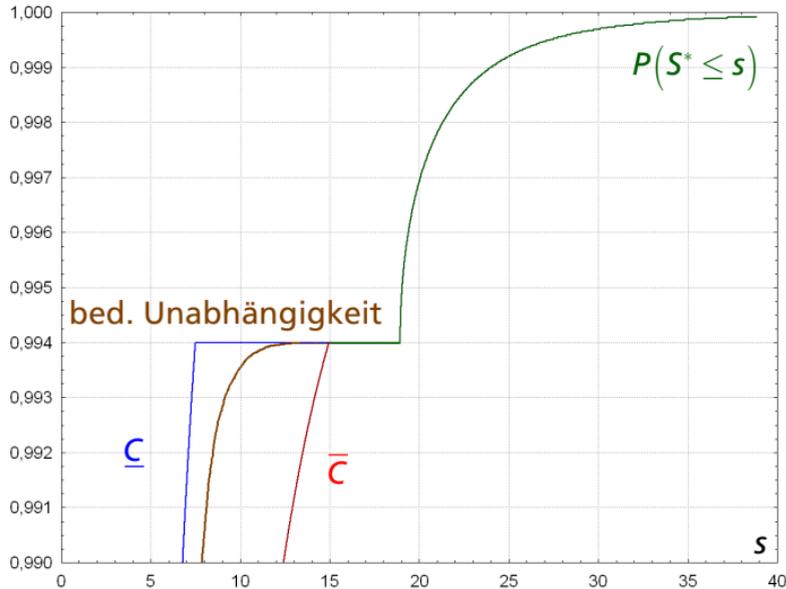
## 4. Korrelation und Diversifikation



Links: Graph von  $\text{VaR}_\alpha(X^* + Y^*)$  und  $\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$  als Funktion von  $\sigma$

Rechts: Graph von  $\rho_{\max}(X^*, Y^*)$  und  $\rho_{\min}(X^*, Y^*)$  als Funktion von  $\sigma$

## 4. Korrelation und Diversifikation



Oberer Teil der Verteilungsfunktion des Summen-Risikos  $S^* = X^* + Y^*$  für  $\sigma = 1$

## 5. Tailabhängigkeit und Diversifikation

### Populäre Irrtümer:

Eine *positive* Tailabhängigkeit *reduziert* den Diversifikationseffekt,  
eine *nicht-positive* Tailabhängigkeit *erhöht* den Diversifikationseffekt.

### Bemerkung:

Die Copula der Proposition A hat *keine* obere Tailabhängigkeit:

$$\lambda_u = \lim_{u \uparrow 1} \frac{P(U > u, V > u)}{1 - u} = 0$$

weil für  $1 - (\alpha + \varepsilon) / 2 < u \leq 1$ , also  $2 - \alpha - \varepsilon - u < u$  gilt:

$$P(U > u, V > u) = P(U > u, 2 - \alpha - \varepsilon - U > u) = P(u < U < 2 - \alpha - \varepsilon - u) = P(\emptyset) = 0.$$

## 5. Tailabhängigkeit und Diversifikation

**Proposition B.** Es mögen die Voraussetzungen der Proposition A gelten, mit der folgenden Modifikation der Copula-Konstruktion:

$$V < 1 - \alpha - \varepsilon \Leftrightarrow U < 1 - \alpha - \varepsilon \text{ und } V = \begin{cases} 2 - \alpha - \varepsilon - \gamma - U & \text{für } 1 - \alpha - \varepsilon \leq U < 1 - \gamma \\ U & \text{für } 1 - \gamma \leq U \leq 1 \end{cases}$$

mit einem nicht-negativen  $\gamma < \alpha$ . Dann gilt, für genügend kleine  $\varepsilon$  und  $\gamma$ ,

$$\min\{Q_X(u) + Q_Y(2 - \alpha - \varepsilon - \gamma - u) \mid 1 - \alpha - \varepsilon \leq u \leq 1 - \gamma\} > Q_X(1 - \alpha) + Q_Y(1 - \alpha)$$

mit einem erneuten Risiko-Konzentrationseffekt:

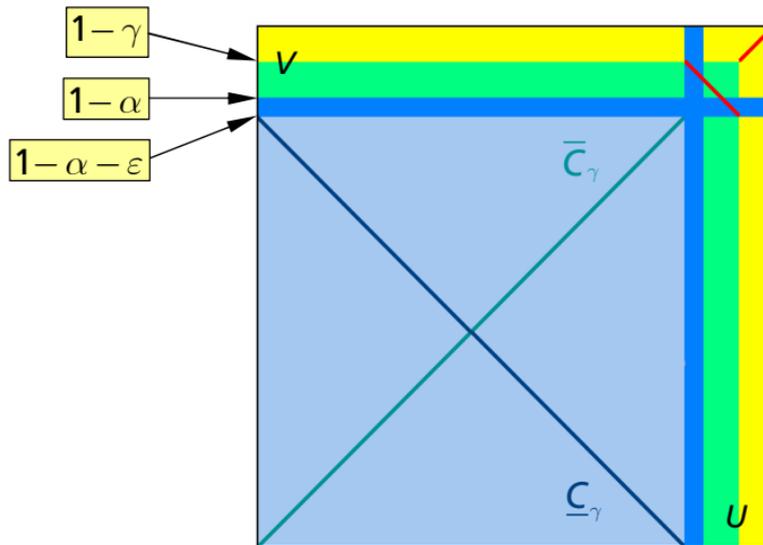
$$\text{VaR}_\alpha(X^* + Y^*) > \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y).$$

## 5. Tailabhängigkeit und Diversifikation

Mit dieser Copula-Konstruktion ist die Korrelation  $\rho(X^*, Y^*)$  wieder minimal, wenn  $V = 1 - \alpha - \varepsilon - U$  für  $U < 1 - \alpha - \varepsilon$  (untere extreme Copula  $\underline{C}_\gamma$ ) und maximal, wenn  $V = U$  für  $U < 1 - \alpha - \varepsilon$  (obere extreme Copula  $\overline{C}_\gamma$ ). In allen Fällen sind die Risiken tailabhängig mit

$$\lambda_u = \lim_{u \uparrow 1} \frac{P(U > u, V > u)}{1 - u} = 1.$$

## 5. Tailabhängigkeit und Diversifikation



untere und obere extremale Copulas mit Tailabhängigkeit 1

## 5. Tailabhängigkeit und Diversifikation

**Beispiel C.** Die Risiken  $X$  und  $Y$  mögen wieder der gleichen Lognormal-Verteilung  $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$  mit  $\sigma > 0$  genügen, d.h.  $E(X) = E(Y) = 1$ .

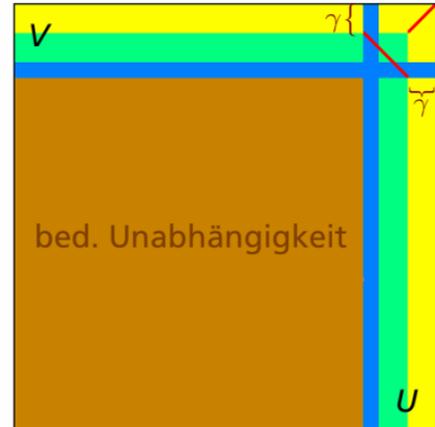
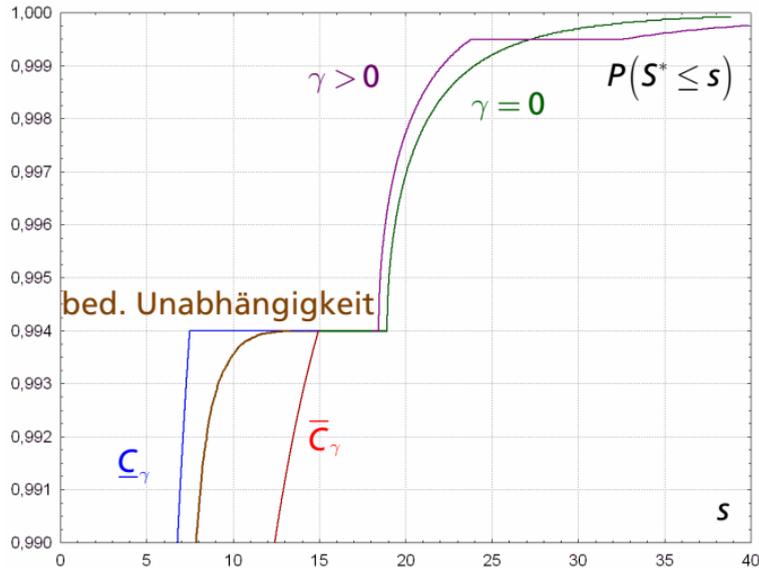
Die folgende Tabelle zeigt einige numerische Ergebnisse für die extremalen Copulas  $\underline{C}_\gamma$  und  $\bar{C}_\gamma$  in Proposition B, insbesondere die maximal mögliche Spanne der dadurch induzierten Korrelationen. Gemäß dem Solvency II-Standard sei wieder  $\alpha = 0.005$  gewählt (und  $\varepsilon = 0.001$  sowie  $\gamma = 0.0005$ , was hier ausreicht).

## 5. Tailabhängigkeit und Diversifikation

$\sigma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(Y)$	1.2873	1.6408	2.0704	2.5866	3.1992	3.9177	4.7497
$\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$	2.5746	3.2816	4.1408	5.1732	6.3984	7.8354	9.4994
$\text{VaR}_\alpha(X^* + Y^*)$	2.6134	3.3811	4.3308	5.4923	6.8962	8.5730	10.5516
$\rho_{\min}(X^*, Y^*)$	-0.8710	-0.8193	-0.7471	-0.6568	-0.5515	-0.4349	-0.3107
$\rho_{\max}(X^*, Y^*)$	0.9993	0.9988	0.9981	0.9969	0.9953	0.9929	0.9974

$$P^X = P^Y = \mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

## 5. Tailabhängigkeit und Diversifikation



## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

### Problem:

Die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke ist keine Copula in mehr als zwei Dimensionen, d.h. es gibt keine untere "Worst-Case"-Copula in höheren Dimensionen. Deshalb können die Konstruktionen der vorigen Abschnitte nicht sofort in einfacher Weise verallgemeinert werden.

### Pragmatische Lösung:

Gauß-Copula mit paarweise negativen Korrelationen (beinhaltet die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke in zwei Dimensionen, mit der Korrelation  $\rho = -1$ ).

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

**Proposition C.** Sei  $\Sigma = (\sigma_{ij})$  eine symmetrische  $n \times n$  Matrix mit  $\sigma_{ii} = 1$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $\sigma_{ij} = \rho$  für  $1 \leq i < j \leq n$  mit  $n \geq 2$ .  $\Sigma$  ist nicht-negativ definit genau dann, wenn gilt:  $-\frac{1}{n-1} \leq \rho \leq 1$ .

Dies folgt aus der Entwicklung des charakteristischen Polynoms von  $\Sigma$ :

$$\varphi(\lambda) = \det(\Sigma - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = (1 + (n-1)\rho - \lambda) \cdot (\lambda - (1-\rho))^{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}$$

wo  $\mathbf{I}_n$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix bezeichnet. Die Eigenwerte von  $\Sigma$  sind gegeben durch  $\lambda_1 = 1 + (n-1)\rho$ ,  $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1 - \rho$ .

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

Dies impliziert, dass der "gleichmäßig schlechteste Fall" für die  $n$ -dimensionale Gauß-Copula gegeben ist durch die Korrelationsmatrix

$$\Sigma_0 = (\sigma_{ij}(\mathbf{0})) \quad \text{mit} \quad \sigma_{ii}(\mathbf{0}) = 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{und} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{0}) = \rho_0 := -\frac{1}{n-1} \quad \text{für} \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Im Spezialfall  $n=2$  ergibt sich  $\rho_0 = -1$ , was der unteren Fréchet-Hoeffding-Schranke entspricht.

Die Eigenwerte sind hier gegeben durch

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_j = \frac{n}{n-1} \quad \text{für} \quad j = 2, \dots, n.$$

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

Man kann zeigen, dass für das Problem eine Basis orthonormaler Eigenvektoren  $\{t_1, \dots, t_n\}$  der Form  $t_j = (t_{1j}, \dots, t_{nj})^tr$  existiert mit

$$t_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{für } j = 1, 1 \leq i \leq n \\ -\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} & \text{für } 1 \leq i < j \\ \sqrt{\frac{j-1}{j}} & \text{für } i = j > 1 \\ 0 & \text{für } j < i \leq n \end{cases} \quad \text{und } j = 1, \dots, n.$$

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

Durch Zusammenfassen dieser Eigenvektoren zu der Matrix  $T := [t_1 t_2 \dots t_n]$  erhält man die Spektraldarstellung

$$\Sigma = T \Delta T^{-1} = T \Delta T^{tr}$$

wobei  $\Delta = \frac{n}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte bezeichnet.

Diese Darstellung erlaubt auch einen einfachen Monte Carlo Algorithmus zur Simulation einer Gauß-Copula mit der Korrelationsmatrix  $\Sigma_0$ .

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

**Proposition D.** Seien  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  (nicht notwendig verschiedene)  $n$ -dimensionale Zufallsvektoren mit stetigen uniformen Randverteilungen  $\mathcal{U}[0,1]$  und sei  $I$  eine  $B(1,p)$ -binomialverteilte Zufallsvariable mit  $0 < p < 1$ ,

unabhängig von  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ , dann besitzt der Zufallsvektor  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$  mit den

Komponenten  $W_j := I \cdot p \cdot U_j + (1-I) \cdot [p + (1-p) \cdot V_j]$  für  $j = 1, \dots, n$

ebenfalls die Randverteilung  $\mathcal{U}[0,1]$ .

Mit anderen Worten: Proposition D gestattet eine stückweise Konstruktion „neuer“ Copulas aus gegebenen.

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

**Bemerkung:** Die Copula-Konstruktion aus Abschnitt 4 ist genau von diesem Typ, wobei  $V$  die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke als Copula besitzt, und  $U$  einer beliebigen Copula folgen kann (zwischen der unteren und oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke, inklusive der Unabhängigkeit der Komponenten).

Die Tatsache, dass zwei Risiken mit fast beliebiger Korrelationsstruktur so konstruiert werden können, dass ihre Aggregation zu einer Risikokonzentration führt, kann - zumindest empirisch - auch in höheren Dimensionen gezeigt werden, unter Benutzung des Konstruktionsprinzips aus Proposition D und der „gleichmäßig schlechtesten“ Gauß-Copula für den Zufallsvektor  $V$ .

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen

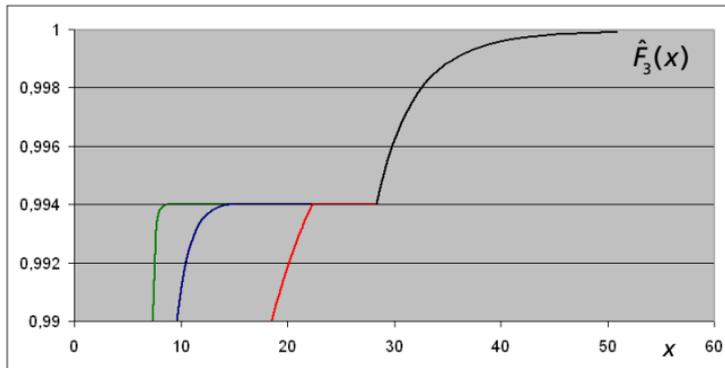
Die folgende Graphik zeigt die empirische Verteilungsfunktion der Summe von drei  $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$ -lognormalverteilten Risiken  $X_1, X_2, X_3$  für  $\sigma = 1$  mit einer gemeinsamen Copula gemäß Proposition D, für  $\rho = 0.994$  und die drei Fälle

1. **U** folgt einer "gleichmäßig schlechtesten" Gauß-Copula (grün)
2. **U** besitzt unabhängige Komponenten (blau)
3. **U** folgt der oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke als Copula (rot).

Der Simulationsumfang beträgt jeweils 1 000 000.

Die paarweisen empirischen Korrelationen zwischen jeweils zwei Risiken liegen im Intervall  $[0,14; 0,91]$ , mit dem Wert 0,32 in Fall 2.

## 6. Erweiterungen für höhere Dimensionen



empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_3(x) \text{ von } \sum_{i=1}^3 X_i$$

Hier gilt

$$\sum_{i=1}^3 \text{VaR}_{0,005}(X_i) = 23,913,$$

aber (empirisch)

$$\widehat{\text{VaR}}_{0,005} \left( \sum_{i=1}^3 X_i \right) > 28,028$$

in allen drei Fällen.

## 7. Zusammenfassung und Fazit

- Weder Korrelationen noch das Vorliegen einer Tail(un)abhängigkeit haben grundsätzlich Auswirkungen auf einen Diversifikationseffekt unter dem Risikomaß Value at Risk.
- Jeder Versuch, solche Konzepte in ein einfaches Standard-Modell der Säule I unter Solvency II zum Zweck der Reduktion des Solvency Capital Requirements im Fall eines Diversifikationseffekts zu integrieren, entbehrt einer stringenten mathematischen Begründung.

*The concept of diversification is meaningless unless applied in the context of a well-defined joint model. Any interpretation of diversification in the absence of such a model should be avoided.*

[modifiziert nach McNeil, Frey and Embrechts (2005), p. 205]

## 8. Literatur

- ARTZNER, P, DELBAEN, F., EBER, J.M., HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* **9**, No. 3 , 203–228
- CRUZ., M. (ed.) (2009). *The Solvency II Handbook. Developing ERM Frameworks in Insurance and Reinsurance Companies.* Risk Books, London.
- DOFF, R. (2011). *Risk Management for Insurers. Risk Control, Economic Capital and Solvency II.* 2<sup>nd</sup> ed., Risk Books, London.
- GESETZ ZUR MODERNISIERUNG DER FINANZAUFICHT ÜBER VERSICHERUNGEN vom 1.4.2015, in: Bundesgesetzblatt Jahrgang 2015 Teil I Nr. 14, ausgegeben zu Bonn am 10. April 2015
- HÜRLIMANN, W. (2009a). Optimisation of the Non-life Insurance Risk Diversification in Solvency II. In: Cruz., M. (Ed.) (2009). *The Solvency II Handbook. Developing ERM Frameworks in Insurance and Reinsurance Companies*, Chapter 12, pp. 325 - 347, Risk Books, London.
- HÜRLIMANN, W. (2009b). On the Non-life Solvency II model. In: Cruz., M. (Ed.) (2009). *The Solvency II Handbook. Developing ERM Frameworks in Insurance and Reinsurance Companies*, Chapter 13, pp. 349 - 370, Risk Books, London.
- MCNEIL, A.J., FREY, R., EMBRECHTS, P. (2005). *Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques, Tools.* Princeton Univ. Press, Princeton.
- NELSEN, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas.* 2<sup>nd</sup> ed., Springer, N.Y.
- Official Journal of the European Union (2009), Vol. 52, L 335: DIRECTIVE 2009/138/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)
- PFEIFER, D. (2013): Correlation, tail dependence and diversification. In: C. Becker, R. Fried, S. Kuhnt (Hrsg.): *Robustness and Complex Data Structures. Festschrift in Honour of Ursula Gather*, 301 - 314, Springer, Berlin.
- SANDSTRÖM, A. (2011). *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers. Theory and Practice.* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- RÜSCHENDORF, L. (2013): *Mathematical Risk Analysis. Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios.* Springer, Berlin.