

Gedanken zur Ausgestaltung der Versicherungsmathematischen Funktion unter Solvency II

Solvara-Anwendertreffen

ISS, Köln, 25. April 2016

Dietmar Pfeifer

Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik

Agenda

I. Rechtliche Grundlagen

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

- II.1. Das Abwicklungsdreieck
- II.2. Das Chain Ladder Verfahren
- II.3. Sensitivitätsanalysen
- II.4. Backtesting

III. Rückstellungen für Rentenfälle

- III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen
- III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme
- III.3. Sensitivitätsanalysen

IV. Quartalsverschiebungen

- IV.1. Nicht-Rentenfälle
- IV.2. Rentenfälle

V. Sonstige Berechnungen

VI. Zusammenfassung und Fazit

I. Rechtliche Grundlagen

I. Rechtliche Grundlagen

Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen, §31:

(1) Versicherungsunternehmen müssen über eine wirksame **versicherungsmathematische Funktion** verfügen. Die Aufgabe dieser Funktion ist es, in Bezug auf die Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen

1. die **Berechnung zu koordinieren**,
2. die **Angemessenheit** der verwendeten Methoden und der zugrunde liegenden Modelle sowie der getroffenen Annahmen zu **gewährleisten**,
3. die **Hinlänglichkeit** und die Qualität der zugrunde gelegten Daten zu **bewerten**,
4. die besten Schätzwerte mit den **Erfahrungswerten** zu **vergleichen**,
5. den Vorstand über die Verlässlichkeit und Angemessenheit der Berechnung zu unterrichten und
6. die Berechnung in den in § 79 genannten Fällen zu überwachen.

I. Rechtliche Grundlagen

Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen, §31:

(2) Darüber hinaus gibt die versicherungsmathematische Funktion eine **Stellungnahme** zur allgemeinen **Zeichnungs- und Annahmepolitik** und zur Angemessenheit der **Rückversicherungsvereinbarungen** ab. Sie trägt zur wirksamen Umsetzung des Risikomanagementsystems, insbesondere im Hinblick auf die Entwicklung interner Modelle, und zur Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung bei.

(3) Wer die versicherungsmathematische Funktion ausübt, muss über **Kenntnisse** der **Versicherungs- und der Finanzmathematik** verfügen, die der Art, dem Umfang und der Komplexität der Risiken des Versicherungsunternehmens **angemessen** sind, und einschlägige Erfahrungen mit den maßgeblichen fachlichen und sonstigen Standards darlegen können.

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

1. Die versicherungsmathematische Funktion koordiniert die Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen und nimmt in diesem Rahmen alle folgenden Aufgaben wahr:

(a) Sie wendet Methoden und Verfahren an, die dazu dienen, die **Hinlänglichkeit der versicherungstechnischen Rückstellungen** zu bewerten und zu gewährleisten, dass deren Berechnung im Einklang mit den Anforderungen der Artikel 75 bis 86 der Richtlinie 2009/138/EG erfolgt.

(b) Sie bewertet die **Unsicherheiten**, mit denen die bei der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen vorgenommenen Schätzungen behaftet sind.

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

1. Die versicherungsmathematische Funktion koordiniert die Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen und nimmt in diesem Rahmen alle folgenden Aufgaben wahr:

(c) Sie gewährleistet, dass etwaigen Unzulänglichkeiten der zur Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen verwendeten Daten auf angemessene Weise Rechnung getragen wird.

(d) Sie stellt sicher, dass in den in Artikel 82 der Richtlinie 2009/138/EG genannten Fällen für die Berechnung des besten Schätzwerts die **am besten geeigneten Näherungswerte** verwendet werden.

(e) Sie stellt sicher, dass im Hinblick auf eine angemessene Bewertung der zugrunde liegenden Risiken **homogene Risikogruppen** von Versicherungs- und Rückversicherungsverpflichtungen bestimmt werden.

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

1. Die versicherungsmathematische Funktion koordiniert die Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen und nimmt in diesem Rahmen alle folgenden Aufgaben wahr:

(f) Sie prüft relevante von den Finanzmärkten bereitgestellte Informationen sowie allgemein verfügbare Daten über versicherungstechnische Risiken und gewährleistet, dass diese bei der Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen berücksichtigt werden.

(g) Sie stellt **Vergleiche** an und begründet etwaige wesentliche **Unterschiede** bei der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen **im Jahresvergleich**.

(h) Sie gewährleistet eine angemessene Bewertung der in Versicherungs- und Rückversicherungsverträgen enthaltenen Optionen und Garantien.

1. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

2. Die versicherungsmathematische Funktion bewertet, ob die bei der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen zugrunde gelegten **Methoden und Annahmen** im Lichte der verfügbaren Daten für die jeweiligen Geschäftsbereiche des Unternehmens und angesichts der Art und Weise, wie das Unternehmen geführt wird, **angemessen** sind.

3. Die versicherungsmathematische Funktion bewertet, ob die bei der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen verwendeten **Informationstechnologiesysteme** die versicherungsmathematischen und statistischen Verfahren ausreichend **unterstützen**.

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

4. Beim Vergleich der besten Schätzwerte mit Erfahrungsdaten überprüft die versicherungsmathematische Funktion die **Qualität früherer bester Schätzwerte** und nutzt die bei dieser Bewertung gewonnenen Erkenntnisse im Sinne einer **Verbesserung der Qualität** der laufenden Berechnungen. Der Vergleich der besten Schätzwerte mit Erfahrungsdaten beinhaltet Vergleiche zwischen beobachteten Werten und den der Berechnung der besten Schätzwerte zugrunde liegenden Werten, so dass Schlussfolgerungen gezogen werden können zur Angemessenheit, Exaktheit und Vollständigkeit der zugrunde gelegten Daten und Annahmen sowie zu den bei ihrer Berechnung angewandten Methoden.

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

5. Die dem Verwaltungs-, Management- oder Aufsichtsorgan vorgelegten Informationen über die Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen enthalten mindestens eine **begründete Analyse zur Verlässlichkeit und Angemessenheit ihrer Berechnung** sowie zu den Quellen und zum Grad der Unsicherheit, mit denen die Schätzung der versicherungstechnischen Rückstellungen behaftet ist. Die begründete Analyse wird durch eine **Sensitivitätsanalyse** untermauert, in der die Sensitivität der versicherungstechnischen Rückstellungen gegenüber jedem einzelnen der größeren Risiken untersucht wird, die den von den versicherungstechnischen Rückstellungen abgedeckten Verpflichtungen zugrunde liegen. Die versicherungsmathematische Funktion äußert und erläutert klar und deutlich etwaige Bedenken hinsichtlich der Angemessenheit der versicherungstechnischen Rückstellungen.

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

6. Was die Zeichnungspolitik anbelangt, so enthält die gemäß Artikel 48 Absatz 1 Buchstabe g der Richtlinie 2009/138/EG zu formulierende Stellungnahme der versicherungsmathematischen Funktion zumindest Schlussfolgerungen zu folgenden Aspekten:

(a) **Hinlänglichkeit der zu verdienenden Prämien** für die Bedeckung künftiger Ansprüche und Aufwendungen, insbesondere unter Berücksichtigung der zugrunde liegenden Risiken (einschließlich versicherungstechnischer Risiken) und Auswirkungen der in Versicherungs- und Rückversicherungsverträgen vorgesehenen Optionen und Garantien auf die Hinlänglichkeit der Prämien;

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

6. Was die Zeichnungspolitik anbelangt, so enthält die gemäß Artikel 48 Absatz 1 Buchstabe g der Richtlinie 2009/138/EG zu formulierende Stellungnahme der versicherungsmathematischen Funktion zumindest Schlussfolgerungen zu folgenden Aspekten:

- (b) **Auswirkungen** von **Inflation**, **rechtlichen Risiken**, **Veränderungen** der Zusammensetzung des Unternehmensportfolios und Systemen zur Anpassung der von Versicherungsnehmern zu zahlenden Prämien nach oben oder nach unten je nach Schadensverlauf (Bonus-/Malus-Systeme) oder ähnlichen Systemen, die für spezifische homogene Risikogruppen eingeführt werden;
- (c) zunehmende Tendenz eines Portfolios von Versicherungsverträgen, Versicherte mit höherem Risikoprofil zu gewinnen bzw. zu halten (Anti-Selektion).

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

7. Was die **Rückversicherungsvereinbarungen** insgesamt anbelangt, so enthält die gemäß Artikel 48 Absatz 1 Buchstabe h der Richtlinie 2009/138/EG zu formulierende Stellungnahme der versicherungsmathematischen Funktion eine Analyse der Angemessenheit von Folgendem:

- (a) **Risikoprofil** und **Zeichnungspolitik** des Unternehmens;
- (b) Rückversicherungsanbieter unter Berücksichtigung ihrer **Bonität**;
- (c) erwartete Bedeckung in Stressszenarien in Bezug auf die Zeichnungspolitik;
- (d) **Berechnung der einforderbaren Beträge** aus Rückversicherungsverträgen und gegenüber Zweckgesellschaften.

I. Rechtliche Grundlagen

Delegierte Verordnung; Artikel 272: Versicherungsmathematische Funktion

8. Die versicherungsmathematische Funktion erstellt **mindestens einmal jährlich einen schriftlichen Bericht**, der dem Verwaltungs-, Management- oder Aufsichtsorgan vorzulegen ist. Der Bericht dokumentiert alle von der versicherungsmathematischen Funktion wahrgenommenen Aufgaben sowie die erzielten Ergebnisse, benennt klar und deutlich etwaige Mängel und enthält Empfehlungen zur Behebung solcher Mängel.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Abwicklungsdreiecke bilden eine Grundlage für die Schätzung des **Musters**, welches der Schadenabwicklung zu Grunde liegt, und der damit verbundenen zukünftigen Zahlungsströme. In diesen Dreiecken liegen die über ein Jahr aggregierten Zahlungen zur Bedienung der Leistungsansprüche der Versicherungsnehmer und der externen Schadenregulierungskosten nach **Anfalljahr** und **Abwicklungsjahr** aufgeschlüsselt vor. Das Abwicklungsdreieck erhält seine typische Form dadurch, dass die Abwicklungsjahre als relative Abwicklungsjahre mit den Indizes $0, 1, \dots, n$ dargestellt werden, die Anfalljahre mit den Indizes $0, 1, \dots, n+1$, wobei sich der Index $n+1$ auf das dem Stichtag folgende Anfalljahr bezieht. Das älteste Anfalljahr erhält also den Index 0 und das letzte historische Anfalljahr mit beobachteten Zahlungen den Index n . Man spricht dabei von **relativen Anfalljahren**.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Für die Berechnung der Rückstellungen für Schäden der **Vergangenheit** (→ **Schadenrückstellung**) beschränkt man sich auf die Anfalljahre mit den Indizes $0, 1, \dots, n$. Dabei ist darauf zu achten, dass nach bestem Wissen die Schäden des relativen Anfalljahres 0 vollständig abgewickelt sind oder nur noch nicht-materielle Bagatellbeträge offen lassen.

Das Anfalljahr mit dem Index $n + 1$ wird dem eigentlichen Dreieck als **neue Zeile** hinzugefügt, um auch die Abwicklung von Schäden, die aus dem zum Stichtag bekannten Bestand an Versicherungsverträgen vermutlich in der **Zukunft** entstehen werden, zu erfassen (→ **Prämienrückstellung**).

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Die Schadenzahlungen (pro Jahr) werden in der Regel als *Zuwächse* bezeichnet und das Abwicklungsdreieck, das diese beinhaltet, *Abwicklungsdreieck der Zuwächse*. Für eine allgemeine Beschreibung greift man für die Zuwächse auf eine Notation mit Zufallsgrößen $Z_i(j)$ zurück, wobei i das relative Anfalljahr und j das relative Abwicklungsjahr bezeichnen. Die Indizes i und j sind somit ganze Zahlen zwischen 0 und n . Tabelle 1 illustriert ein idealisiertes Abwicklungsdreieck der Zuwächse.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenzuwächse)					
	0	1	2	...	$n-1$	n
0	$Z_0(0)$	$Z_0(1)$	$Z_0(2)$	...	$Z_0(n-1)$	$Z_0(n)$
1	$Z_1(0)$	$Z_1(1)$	$Z_1(2)$	...	$Z_1(n-1)$	-
2	$Z_2(0)$	$Z_2(1)$	$Z_2(2)$	...	-	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	-	-	-
$n-1$	$Z_{n-1}(0)$	$Z_{n-1}(1)$	-	-	-	-
n	$Z_n(0)$	-	-	-	-	-

Tabelle1: formaler Aufbau eines Abwicklungsdreiecks für Zuwächse

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Die bis einschließlich zum Abwicklungsjahr k geleisteten Schadenzahlungen eines Anfalljahres heißen in der Regel **Schadenstände** und sind definiert als

$$S_i(k) := \sum_{j=0}^k Z_i(j),$$

wobei die rechte Seite der Formel so zu verstehen ist, dass die Schadenzahlungen vom Index 0 bis zum Index k aufsummiert werden. Ein mit Schadenständen befülltes Abwicklungsdreieck wird als *Abwicklungsdreieck der Schadenstände* bezeichnet. Die Zahlungen $Z_i(j)$ bilden die Zuwächse der Schadenstände, d.h. es gilt $Z_i(j) = S_i(j) - S_i(j-1)$ für $j = 1, \dots, k$. Tabelle 2 zeigt den formalen Aufbau eines entsprechenden Abwicklungsdreiecks.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstand)					
	0	1	2	...	$n-1$	n
0	$S_0(0)$	$S_0(1)$	$S_0(2)$	...	$S_0(n-1)$	$S_0(n)$
1	$S_1(0)$	$S_1(1)$	$S_1(2)$	...	$S_1(n-1)$	-
2	$S_2(0)$	$S_2(1)$	$S_2(2)$	...	-	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	-	-	-
$n-1$	$S_{n-1}(0)$	$S_{n-1}(1)$	-	-	-	-
n	$S_n(0)$	-	-	-	-	-

Tabelle2: formaler Aufbau eines Abwicklungsdreiecks für Schadenstände

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Unter den getroffenen Annahmen erfolgen keine wesentlichen Schadenzahlungen mehr nach dem n -ten Abwicklungsjahr. Daher bildet $S_i(n)$ praktisch den **Endschadenstand (Ultimate)** des i -ten Anfalljahres. Da der letzte beobachtete Schadenstand $S_i(n-i)$ des i -ten Anfalljahres auf der Diagonalen liegt, müssen die fehlenden Einträge $S_i(n-i+1), \dots, S_i(n)$ geeignet geschätzt werden. Als Schätzer R_i für die notwendige Schadenrückstellung des i -ten Anfalljahres ergibt sich dann

$$R_i := S_i(n) - S_i(n-i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Für das Anfalljahr mit dem Index 0 ist voraussetzungsgemäß keine Rückstellung mehr zu bilden. Eine Schätzung für die gesamte Schadenrückstellung R der Vergangenheit ist daher gegeben durch (→ **Best Estimate**)

$$R = \sum_{i=1}^n R_i.$$

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

In der Praxis sind solche Schadenrückstellungen sowohl für die **Brutto-** als auch für die **Netto-Schadenzahlungen** (d.h. vor- und nach Rückversicherung) auszuweisen.

Aus dem zu einem Quadrat vervollständigten Abwicklungsdreieck lassen sich rückwirkend durch **zeilenweise Differenzbildung** der geschätzten Schadenstände und nachfolgende Saldierung alle noch ausstehenden zukünftigen (undiskontierten) **Zahlungsströme** CF_{n+k} , $k = 1, \dots, n$ der Folgejahre $n+1, \dots, 2n$ berechnen:

$$CF_{n+k} := \sum_{i=k}^n \{S_i(n-i+k) - S_i(n-i+k-1)\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Abwicklungsdreieck

Die **Prognose der zukünftigen Zahlungsströme** für neue Schäden, die aus dem Bestand des Stichtags erfolgen, ist analog vorzunehmen. Hierfür ist zunächst eine geeignete **Schätzung des gemeldeten Schadenvolumens für das Folgejahr**, also das nächste Anfalljahr, z.B. auf der Basis **gemittelter Brutto-Anfalljahres-Schadenquoten der Vergangenheit** und dem zum Stichtag bekannten **Prämienvolumen** vorzunehmen (→ **Prämienrückstellung**). Die Schätzung des Ultimates bzw. der sich daraus ergebenden Zahlungsströme erfolgt dann rechnerisch genau so wie die entsprechende Berechnung für das letzte beobachtete Anfalljahr mit dem Index n .

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.2. Das Chain Ladder Verfahren

Grundlage des Chain Ladder Verfahrens ist ein *Abwicklungsdreieck für Schadenstände*. Für die Anwendung sollten folgende Prämissen erfüllt sein:

- Alle Schäden werden **strukturell in ähnlicher Weise** abgewickelt, d.h. es gibt keine besonderen Strukturbrüche in den Abwicklungsmustern der Anfalljahre.
- Die Schadenstände aus dem Anfalljahr i im Abwicklungsjahr k , $k \geq 1$, entstehen gedanklich aus den Schadenständen des Abwicklungsjahrs $k - 1$ jeweils durch **Multiplikation** mit einem als **zufällig** angesehenen **Faktor** $F_j(k)$. Dabei wird unterstellt, dass die Faktoren sämtlich voneinander stochastisch unabhängig sind und die spaltenweise zusammengenommenen Faktoren desselben Abwicklungsjahrs k , $F_1(k), \dots, F_{n-k}(k)$, denselben Erwartungswert (theoretischer Chain Ladder Faktor) $f(k) = E[F_j(k)]$, $j = 0, \dots, n - k$, besitzen.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.2. Das Chain Ladder Verfahren

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k (Schadenstand)					
	0	1	2	3	4	Rückstellung
0	2.334	3.714	5.061	6.058	6.361	0
1	1.784	3.071	4.265	4.913	5.159	246
2	2.055	3.470	4.715	5.547	5.824	1.109
3	3.113	5.225	7.154	8.416	8.837	3.612
4	2.562	4.271	5.848	6.879	7.223	4.661
$\hat{f}(k)$	-	1.66703	1,36919	1,17639	1,05002	
gesamt						9.628

Tabelle 3: Rechenbeispiel; letzte bekannte Schadenstände sind blau unterlegt

Exemplarische Erläuterung:

$$\hat{f}(1) = 1,66703 = \frac{15.480}{9.286} = \frac{3.714 + 3.071 + 3.470 + 5.225}{2.334 + 1.784 + 2.055 + 3.113}$$

Exemplarische Erläuterung:

$$S_3(3) = 8.416 = 5.225 \times 1,36919 \times 1,17639 = S_3(1) \times \hat{f}(2) \times \hat{f}(3)$$

Exemplarische Erläuterung:

$$RST[S_2(4)] = 1.109 = 5.824 - 4.715 = 4.715 \times 0,23523 = S_2(2) \times \{\hat{f}(3) \times \hat{f}(4) - 1\}$$

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Chain Ladder Verfahren

Für die hieraus resultierenden zukünftigen undiskontierten Zahlungsströme ergibt sich folgende Tabelle:

Folgejahr		Cashflows aus Anfalljahr				
		1	2	3	4	CF_{4+k}
5	$k = 1$	246	832	1.929	1.709	4.715
6	$k = 2$		277	1.262	1.577	3.116
7	$k = 3$			421	1.031	1.452
8	$k = 4$				344	344
Saldo		246	1.109	3.612	4.661	9.628

Tabelle 4: zukünftige Zahlungsströme CF_{4+k} aus noch abzuwickelnden Schäden

Exemplarische Erläuterung:

$$832 = 5.547 - 4.715 = S_2(3) - S_2(2)$$

Exemplarische Erläuterung:

$$1.577 = 5.848 - 4.271 = S_4(2) - S_4(1)$$

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.1. Das Chain Ladder Verfahren

Bemerkung: Bei der Rückrechnung von Ultimate-Reserven in zukünftige Zahlungsströme sind sowohl für Nicht-Renten- wie für Rentenfälle **interne Schadenregulierungskosten** einzubeziehen. Im Sinne des Proportionalitätsprinzips geschieht dies am Einfachsten durch eine proportionale Zuordnung dieser Kosten auf die zukünftigen Zahlungsströme, d.h. man multipliziert die Zahlungsströme mit einem festen Faktor, z.B. 20% und weist diese Werte separat als Kostenanteile mit aus.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.3. Sensitivitätsanalysen

Die Bewertung der Angemessenheit der verwendeten Methoden sollte grundsätzlich unter Beachtung des schon erwähnten Erwägungsgrundes (59) der Solvency-II Rahmenrichtlinie und des in der Delegierten Verordnung in Artikel 56 dazu formulierten **Proportionalitätsgrundsatzes** erfolgen. Insbesondere ist zu begründen, warum z.B. das Chain Ladder Verfahren zur Berechnung der Rückstellungen geeignet ist.

In diesem Zusammenhang ist es empfehlenswert, auch eine Schätzung der statistischen **Varianz der Rückstellungen** vorzunehmen, um die potenzielle Variabilität der Ergebnisse einschätzen zu können.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.3. Sensitivitätsanalysen

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k (Schadenstand)						
	0	1	2	3	4	Rückstellung	sigma
0	2.334	3.714	5.061	6.058	6.361	0	0
1	1.784	3.071	4.265	4.913	5.159	246	0
2	2.055	3.470	4.715	5.547	5.824	1.109	111
3	3.113	5.225	7.154	8.416	8.837	3.612	188
4	2.562	4.271	5.848	6.879	7.223	4.661	253
$\hat{f}(k)$	-	1,66703	1,36919	1,17639	1,05002		
$\hat{f}^{(2)}(k)$	-	2,78113	1,87484	1,38439	1,10253		
$\hat{f}^2(k)$	-	2,77897	1,87467	1,38389	1,10253		
gesamt						9.628	335

Tabelle 7: Rückstellungsberechnung mit geschätzten Streuungen

Exemplarische Erläuterung:

$$\hat{f}^{(2)}(1) = 2,78113 = \frac{25.826}{9.286} = \frac{\frac{3.714^2}{2.334} + \frac{3.071^2}{1.784} + \frac{3.470^2}{2.055} + \frac{5.225^2}{3.113}}{2.334 + 1.784 + 2.055 + 3.113}$$

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.4. Backtesting

Ein Vergleich der besten Schätzwerte mit den Erfahrungswerten kann schließlich im einfachsten Fall durch ein **Backtesting** erfolgen, indem das Abwicklungsdreieck um die Zahlungen des vergangenen Jahres (Diagonale) **gekürzt** wird und die daraus resultierende **Prognose** für den Schadenstand des Folgejahres mit dem tatsächlichen Schadenstand **verglichen** wird.

Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis dieser Rechnung mit dem klassischen Chain Ladder Verfahren für das Beispiel aus Tabelle 3.

II. Rückstellungen für Nicht-Rentenfälle

II.4. Backtesting

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k (Schadenstand)					
	0	1	2	3	beobachtet	Abweichung
0	2.334	3.714	5.061	6.058		
1	1.784	3.071	4.265	5.105	4.913	3,91%
2	2.055	3.470	4.770		4.715	1,17%
3	3.113	5.172			5.225	-1,01%
$\hat{f}(k)$ ohne Jahr 4	-	1,66127	1,37450	1,19700		
$\hat{f}(k)$ mit Jahr 4	-	1,66703	1,36919	1,17639		
Abweichung		-0,35%	0,39%	1,75%		

Tabelle 9: Backtesting

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Die Berechnung der Rückstellungen für Rentenfälle und der damit verbundenen zukünftigen Zahlungsströme geschieht prinzipiell anders als in Abschnitt II beschrieben. Grundlage sind hier individuelle, personenbezogene **biometrische Rechnungsgrundlagen**, die in so genannten **Sterbetafeln** erfasst sind. Man unterscheidet dabei **Perioden-** und **Generationensterbetafeln**. Erstere sind heutzutage nur noch von historischem Interesse. Bei einer Periodentafel sind die in der Zukunft erwarteten Veränderungen der Sterblichkeiten (Langlebigkeitstrends) für einen festen Zeitraum eingearbeitet, in der Regel für 25 Jahre. Demgegenüber wird eine **Generationentafel** in Abhängigkeit vom **Geburtsjahr** erstellt. Sie enthält die Sterbewahrscheinlichkeiten ausschließlich für die Personen des betreffenden Jahrgangs unter Berücksichtigung der erwarteten Veränderungen für sämtliche Zeitpunkte in der Zukunft bis zum Ende der Sterbetafel.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

In der Allgemeinen Unfallversicherung, der Kraftfahrt-Unfallversicherung, der Allgemeinen Haftpflichtversicherung sowie der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung werden in bestimmten Fällen Leistungen in Form von – hauptsächlich lebenslangen – **Renten** erbracht. Die Berechnung der entsprechenden **Deckungsrückstellung** hat nach der Deckungsrückstellungsverordnung zu erfolgen und unterliegt demgemäß den gleichen Anforderungen, wie sie für die Altersrenten aus der Sparte Lebensversicherung gelten. Insbesondere zeichnet auch für diese Deckungsrückstellung ein **verantwortlicher Aktuar**.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Weil in der Haftpflichtversicherung die Anspruchsberechtigung in jedem Alter entstehen kann und den Geschädigten selbst oder seine Angehörigen betreffen kann, ergeben sich dort anders als in der Unfallversicherung **keine typischen Schwerpunkte für die Rentenalter**. Auch die in der Unfallversicherung typische Konzentration auf lebenslange Rentenzahlung findet sich bei Haftpflichtrenten nicht, weil dort z.B. auch Verdienstausfall-, Erwerbsminderungsansprüche oder Ansprüche von Waisen zu erfüllen sind.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Für die Berechnung der Rückstellungen aus Rentenfällen nach den neuen Anforderungen aus Solvency II ist daher bis zu einer von der DAV bzw. der BaFin autorisierten Anpassung ebenfalls die **DAV-Sterbetafel HUR 2006** zu verwenden. Zur Vereinfachung im Sinne des Proportionalitätsprinzips wird dafür die **Grundtafel mit Altersverschiebung** verwendet, wodurch eine möglichst große Nähe zur individuellen Generationensterbetafel erreicht wird. Auch dieses Verfahren ist für die Berechnung von Renten-Rückstellungen nach der Deckungsrückstellungsverordnung zulässig und wird in der Regel insbesondere bei Versicherungsunternehmen mit einer nur geringen Anzahl von Rentenfällen angewendet.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Blätter DGVFM (2007) 28: 67–95

DOI 10.1007/s11857-007-0001-7

WORKING GROUP PAPERS

Herleitung der DAV-Sterbetafel 2006 HUR

DAV-Unterarbeitsgruppe Haftpflicht-Unfallrenten*

DAV-Unterarbeitsgruppe Haftpflicht-Unfallrenten, Köln, Germany,
e-mail: marbauer@munichre.com

* Mitglieder der DAV-Unterarbeitsgruppe Haftpflicht-Unfallrenten: H. Bartel, M. Bauer,
R. Krüger, H. Loebus, G. Meissler, U. Pasdika, U. Remmert

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Tabelle 6 DAV 2006 HUR-Grundtafel für die Altersverschiebung

Alter	Männer	Frauen	Alter	Männer	Frauen	Alter	Männer	Frauen
0	0,000726	0,000546	46	0,006436	0,004305	92	0,114334	0,090062
1	0,000761	0,000571	47	0,006748	0,004503	93	0,122730	0,098734
2	0,000798	0,000597	48	0,007076	0,004709	94	0,130948	0,107474
3	0,000837	0,000625	49	0,007420	0,004926	95	0,138863	0,116162
4	0,000877	0,000653	50	0,007781	0,005152	96	0,146316	0,124659
5	0,000920	0,000683	51	0,008159	0,005388	97	0,153177	0,132813
6	0,000965	0,000715	52	0,008555	0,005636	98	0,159790	0,140476
7	0,001012	0,000747	53	0,008971	0,005894	99	0,166401	0,147488
8	0,001061	0,000782	54	0,009407	0,006165	100	0,173001	0,154165
9	0,001112	0,000818	55	0,009864	0,006448	101	0,179601	0,160800
10	0,001166	0,000855	56	0,010343	0,006744	102	0,186193	0,167391
11	0,001223	0,000894	57	0,010845	0,007054	103	0,192768	0,173943
12	0,001282	0,000936	58	0,011372	0,007378	104	0,199336	0,180444
13	0,001345	0,000978	59	0,011925	0,007717	105	0,205890	0,186905
14	0,001410	0,001023	60	0,012504	0,008071	106	0,212422	0,193318
15	0,001479	0,001070	61	0,013112	0,008442	107	0,218935	0,199684
16	0,001550	0,001120	62	0,013749	0,008829	108	0,225435	0,206001
17	0,001626	0,001171	63	0,014417	0,009235	109	0,231908	0,212269
18	0,001705	0,001225	64	0,015382	0,009649	110	0,238358	0,218486
19	0,001788	0,001281	65	0,015699	0,009777	111	0,244783	0,224653
20	0,001875	0,001340	66	0,016048	0,009967	112	0,251182	0,230768

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Tabelle 7 DAV 2006 HUR Altersverschiebung

Jahr	Männer	Frauen	Jahr	Männer	Frauen	Jahr	Männer	Frauen
1910	8	7	1956	-3	-2	2002	-9	-6
1911	8	7	1957	-3	-2	2003	-9	-6
1912	8	7	1958	-3	-3	2004	-10	-6
1913	8	7	1959	-3	-3	2005	-10	-7
1914	8	7	1960	-4	-3	2006	-10	-7
1915	7	6	1961	-4	-3	2007	-10	-7
1916	7	6	1962	-4	-3	2008	-10	-7
1917	6	5	1963	-4	-3	2009	-10	-7
1918	6	5	1964	-5	-3	2010	-10	-7
1919	5	5	1965	-5	-3	2011	-10	-7
1920	5	4	1966	-5	-4	2012	-10	-7
1921	5	4	1967	-5	-4	2013	-10	-7
1922	5	4	1968	-5	-4	2014	-10	-7
1923	4	4	1969	-6	-4	2015	-10	-7
1924	4	4	1970	-6	-4	2016	-10	-7
1925	4	3	1971	-6	-4	2017	-10	-7
1926	4	3	1972	-6	-4	2018	-10	-7
1927	4	3	1973	-6	-4	2019	-10	-7
1928	3	3	1974	-7	-5	2020	-10	-7
1929	3	3	1975	-7	-5	2002	-9	-6
1930	3	3	1976	-7	-5	2003	-9	-6

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Die den Sterbetafeln zu Grunde liegenden Größen sind in erster Linie so genannte *einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten*, die traditionell mit dem Symbol q_x für Männer und q_y für Frauen bezeichnet werden. Sie geben die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass eine jetzt x - bzw. y -jährige lebende Person im Laufe des aktuellen Jahres (also im Alter x bzw. y) verstirbt. Der Bezugszeitpunkt für die Altersbestimmung ist hierbei durchgängig der 1.1. eines jeden Jahres. Das versicherungstechnische Alter einer lebenden Person ist daher durch Rundung aus dem tatsächlichen Geburtsdatum abzuleiten.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Unterschiedliche Sterblichkeiten für Männer und Frauen sind statistisch signifikant nachweisbar, dürfen aber nach der Rechtssprechung des Europäischen Gerichtshofes in vielen Versicherungsprodukten zur Vermeidung einer geschlechtsspezifischen Diskriminierung nicht mehr angewendet werden (→ *Unisex-Tarife*). Da dieses Argument für die Berechnung von versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II keine Rolle spielt, werden hier weiterhin geschlechtsspezifische Sterbetafeln verwendet.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Aus den einjährigen (bedingten) Sterbewahrscheinlichkeiten lassen sich unmittelbar eine Reihe weiterer für die Berechnung von Rückstellungen notwendigen Kenngrößen berechnen, wovon die folgenden besonders wichtig sind (der Index z steht hier wahlweise für x oder y):

$$p_z = {}_1p_z = 1 - q_z :$$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass die lebende z -jährige Person das aktuelle Jahr (also 1 Jahr) überlebt

$${}_k p_z = \prod_{i=0}^{k-1} p_{z+i} :$$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass die lebende z -jährige Person die nächsten k Jahre überlebt

$${}_k p_z \times q_{z+k} :$$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass die lebende z -jährige Person die nächsten k Jahre überlebt und dann im Alter $z + k$ stirbt

$$e_z = \sum_{k \geq 1} {}_k p_z :$$

restliche erwartete Lebensdauer einer lebenden z -jährigen Person

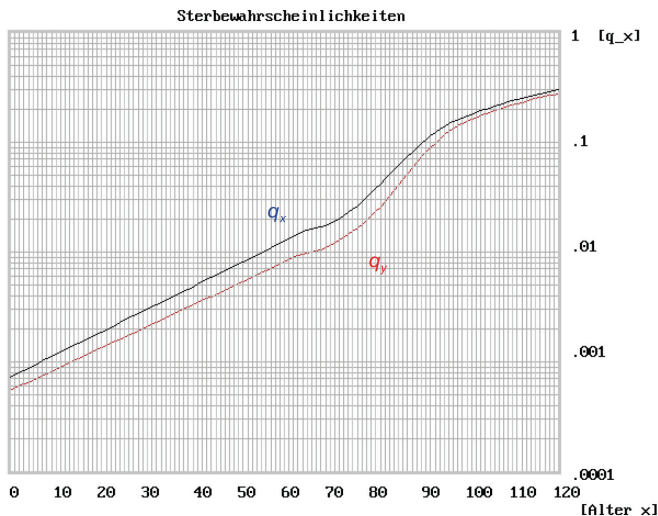
III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Die folgenden Graphiken zeigen exemplarisch den Verlauf der Sterblichkeiten und der restlichen Lebenserwartung für die männliche und weibliche Grundtafel DAV 2006 HUR zum Geburtsjahrgang 1945, das entspricht im Jahr 2015 dem versicherungstechnischen Alter $x = y = 70$ (Quelle: eigene Darstellung).

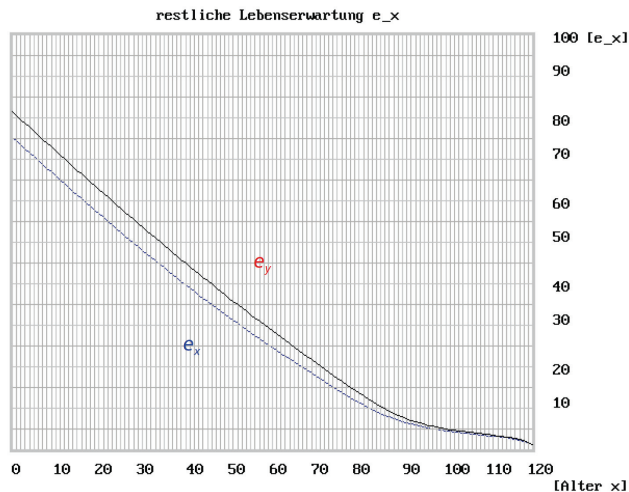
III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen



III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen



III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme

Die Erwartungswerte = Best Estimates zukünftiger Zahlungsströme für Rentenfälle ergeben sich aus den Sterbetafeln durch **Gewichtung** der jährlichen Zahlbeträge Z mit den entsprechenden **Überlebens-** bzw. **Sterbewahrscheinlichkeiten**. Wenn dabei Zahlungen im monatlichen Rhythmus erfolgen, muss eine entsprechende **Korrektur** für eine **unterjährige Zahlweise** vorgenommen werden. Formelmäßig ergibt sich daher für den undiskontierten Best Estimate BEZ_k der Zahlung im k -ten Folgejahr nach dem Bewertungsstichtag der Wert

$$BEZ_k = Z \times \left({}_k p_{z+1} + \frac{1}{2} {}_{k-1} p_{z+1} \times q_{z+k} \right) \text{ mit der Konvention } {}_0 p_{z+1} = 1.$$

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme

Erläuterung: Zum Bewertungsstichtag am Jahresende hat die betreffende lebende Person noch das Alter z . Eine Zahlung im Folgejahr (Fall $k = 1$) erfolgt in der vollen Höhe Z , wenn die Person das Folgejahr (dann im Alter $z + 1$) überlebt, oder im Mittel in der Höhe $Z / 2$, wenn die Person im Laufe des Folgejahres stirbt. Der erste Fall tritt mit der Wahrscheinlichkeit p_{z+1} ein, der zweite mit der Wahrscheinlichkeit q_{z+1} . Wegen $p_{z+1} + q_{z+1} = 1$ sind damit alle möglichen Fälle erfasst. Dies erklärt den obigen Ausdruck für den Fall $k = 1$.

Eine Zahlung im Folgejahr $k > 1$ erfolgt in der vollen Höhe Z , wenn die Person das betreffende Jahr erreicht und (im Alter $z + k$) überlebt, oder im Mittel in der Höhe $Z / 2$, wenn die Person das betreffende Jahr erreicht und im Laufe des k -ten Folgejahres stirbt.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme

Die Berechnung von **Prämienrückstellungen** für Rentenfälle gestaltet sich demgegenüber erheblich schwieriger, vor allem dann, wenn Rentenfälle eher die Ausnahme und nicht die Regel sind.

Im Sinne des **Proportionalitätsprinzips** bietet es sich hier an, bei der Berücksichtigung zukünftiger potenzieller Rentenfälle von **sofortigen Abfindungen** (in Höhe der Summe der zu erwartenden diskontierten Zahlungsströme je Einzelfall) auszugehen. Zur Schätzung der Prämienrückstellung ist dabei sowohl die erwartete Anzahl von neuen Rentenfällen $E(N)$ als auch der erwartete diskontierte Abfindungsbetrag $E(X)$ aus Erfahrungsdaten der Vergangenheit zu schätzen (→ **Expert Opinion**). Nach dem kollektiven Modell der Risikotheorie ergibt sich als Best Estimate BE für die Prämienrückstellung dann der Wert $E(N) \cdot E(X)$.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme

Beispiel:

In den letzten 20 Jahren traten insgesamt 4 Rentenfälle auf. Die fallbezogene durchschnittliche gezahlte bzw. fiktiv berechnete Brutto-Abfindung betrug $E(X) = 250.000$ €. daraus ergibt sich:

$$E(N) = \frac{4}{20} = 0,2 \quad E(X) = 250.000 \quad BE = E(N) \cdot E(X) = 50.000$$

Als Brutto-Prämienrückstellung aus Rentenfällen für das Folgejahr wären demnach 50.000 € zu berücksichtigen. Für die Netto-Prämienrückstellung ist die aktuelle Rückversicherungsordnung geeignet zu berücksichtigen.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme

In einigen Fällen sind die jährlichen Rentenzahlungsbeträge nicht konstant, sondern müssen je nach Sachlage (z.B. aufgrund einer gerichtlichen Regelung) an steigende Krankenkosten u.a. **angepasst** werden. In solchen Fällen sind die Zahlungsbeträge Z für das Folgejahr k mit einem geeigneten **Trendfaktor** $(1+T)^k$ zu multiplizieren, wobei T den geschätzten jährlichen Steigerungssatz bezeichnet (→ **Expert Opinion**). In der obigen Formel ist dementsprechend die Größe Z durch die Größe $Z_k = Z \cdot (1+T)^k$ zu ersetzen.

Für die endgültige Berechnung der **Schadenrückstellung im Rentenbereich** sind diese Zahlungsströme noch mit der jeweils gültigen **Zinsstrukturkurve** von EIOPA zu diskontieren.

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch für den Stichtag Dezember 2014 die entsprechenden Berechnungen der zukünftigen undiskontierten Best Estimates für eine weibliche Person des Jahrgangs 1945 (d.h. mit dem versicherungstechnischen Alter 70 im Jahr 2015), bei einem fiktivem jährlichen Zahlbetrag in Höhe von $Z = 10.000 \text{ €}$.

Jahr	Alter	q_y	p_y	${}_k p_y$	$\Delta({}_k p_y)$	Best Estimate
2015	70	0,011470	0,988530	0,988530	0,011470	9.942,65 €
2016	71	0,012058	0,987942	0,976610	0,011920	9.825,70 €
2017	72	0,012737	0,987263	0,964171	0,012439	9.703,91 €
2018	73	0,013518	0,986482	0,951138	0,013034	9.576,54 €
2019	74	0,014404	0,985596	0,937437	0,013700	9.442,87 €
2020	75	0,015409	0,984591	0,922992	0,014445	9.302,15 €
2021	76	0,016562	0,983438	0,907706	0,015287	9.153,49 €
2022	77	0,017886	0,982114	0,891471	0,016235	8.995,88 €
2023	78	0,019420	0,980580	0,874158	0,017312	8.828,14 €
2024	79	0,021210	0,978790	0,855617	0,018541	8.648,88 €
2025	80	0,023322	0,976678	0,835663	0,019955	8.456,40 €

: : : : :

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.2. Best Estimate zukünftiger Zahlungsströme

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch für den Stichtag Dezember 2014 die entsprechenden Berechnungen der zukünftigen undiskontierten Best Estimates für eine weibliche Person des Jahrgangs 1945 (d.h. mit dem versicherungstechnischen Alter 70 im Jahr 2015), bei einem fiktivem jährlichen Zahlbetrag in Höhe von $Z = 10.000 \text{ €}$.

			⋮	⋮	⋮	⋮	
2060	115	0,248806	0,751194	0,004582	0,001518	53,41 €	
2061	116	0,254715	0,745285	0,003415	0,001167	39,99 €	
2062	117	0,260571	0,739429	0,002525	0,000890	29,70 €	
2063	118	0,266366	0,733634	0,001853	0,000673	21,89 €	
2064	119	0,272112	0,727888	0,001349	0,000504	16,01 €	
2065	120	0,277802	0,722198	0,000974	0,000375	11,61 €	
2066	121	1,000000	0,000000	0,000000	0,000974	4,87 €	
e_y	20,56	Jahre			Rückstellung	210.557,41€	$= (e_y + 1/2) \times 10.000 \text{ €}$

Tabelle 10: Berechnung des undiskontierten Best Estimate für einen Rentenfall

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.3. Sensitivitätsanalysen

Im Bereich der Lebensversicherung werden im Rahmen von Solvency II auch noch weitere Risiken betrachtet, darunter die der **Langlebigkeit** und der damit verbundenen potenziellen Mehrbelastungen der Unternehmen durch höhere Zahlungen als erwartet. Man kann dieses Risiko durch eine Modifikation der Sterblichkeiten im Rahmen einer **Sensitivitätsanalyse** abschätzen, indem man die Sterbewahrscheinlichkeiten q_z für $z < \text{Endalter}$ mit einem Faktor f kleiner als 1 versieht. Die folgende Tabelle zeigt die Auswirkungen solcher Langlebigkeitskorrekturen für das letzte Beispiel (mit Diskontierung).

III. Rückstellungen für Rentenfälle

III.3. Sensitivitätsanalysen

f	e_y (Jahre)	Rückstellung
1	20,56	182.578,94 €
0,95	21,02	185.703,18 €
0,9	21,51	189.001,56 €
0,85	22,05	192.493,11 €
0,8	22,62	196.199,92 €

Tabelle 11: Auswirkungen von Sterblichkeitsanpassungen auf Rentenrückstellungen

IV. Quartalsverschiebungen

IV. Quartalsverschiebungen

IV.1. Nicht-Rentenfälle

Im Folgenden wird ein im Sinne des **Proportionalitätsprinzips vereinfachtes Verfahren** zur quartalsweisen Berechnung von Rückstellungen vorgestellt, welches lediglich eine Aktualisierung der Schadenzahlungen des laufenden Jahres benötigt. Damit entfallen aufwändige Erfassungen von quartalsgenauen Abwicklungsdreiecken.

IV. Quartalsverschiebungen

IV.1. Nicht-Rentenfälle

Wir gehen von einem **Standard-Abwicklungsdreieck** aus. Zeitlich gesehen wird dort in Zeile j jeweils das Ende des vierten Quartals $j^{[4]}$ der dem Anfall-Bezugsjahr j folgenden Abwicklungsperioden jährlicher Dauer betrachtet. Dies kann zeitlich mit dem Beginn des ersten Quartals $(j+1)^{[1]}$ des Folgejahrs $j+1$ identifiziert werden. Die Zahlung $Z_0(0)$ repräsentiert also z.B. alle Zahlungen des Anfalljahres 0 bis zum Ende des vierten Quartals $0^{[4]} = 1^{[1]}$. Wenn man davon ausgeht, dass sich die jährlichen Zahlungen **gleichmäßig** über die Quartale **verteilen**, so lässt sich ein um k Quartale verschobenes Abwicklungsdreieck näherungsweise dadurch bestimmen, dass man die aufeinander folgenden Zeilen des Abwicklungsdreiecks mit den Gewichten $\alpha^{[k]} = k/4$ für das jeweilige Vorjahr und den Gewichten $\beta^{[k]} = 1 - \alpha^{[k]} = 1 - k/4$ für das betrachtete Jahr für $k = 1, 2, 3$ mittelt.

IV. Quartalsverschiebungen

IV.1. Nicht-Rentenfälle

	Abwicklungsperiode					Geschätzter Zuwachs über 4 Quartale	Beobachteter Zuwachs 1. Quartal
Anfallperiode	0	1	2	3	4		
$0^{[4]} = 1^{[0]}$	2.334	3.714	5.061	6.058	6.361	0	0
$1^{[4]} = 2^{[0]}$	1.784	3.071	4.265	4.913	5.149	236	59
$2^{[4]} = 3^{[0]}$	2.055	3.470	4.715	5.423		708	177
$3^{[4]} = 4^{[0]}$	3.113	5.225	6.813			1.588	397
$4^{[4]} = 5^{[0]}$	2.562	4.366				1.804	451
$5^{[4]}$	2.556					2.556	639
CL-Faktoren alt	1,667026	1,369186	1,176389	1,050017			

Tabelle 14: Ergänzung des Dreiecks um die geschätzte Diagonale 1. Quartal

Exemplarische
Erläuterung:
 $6.813 = 5.225 + 1.588$

Exemplarische
Erläuterung:
 $5.149 = 4.913 + 236$

Exemplarische
Erläuterung:
 $236 = 59 / \alpha^{(1)} = 59 \times 4$

IV. Quartalsverschiebungen

IV.1. Nicht-Rentenfälle

	Abwicklungsperiode					Neue Rückstellung	Beobachteter Zuwachs 1. Quartal
Anfallperiode	0	1	2	3	4		
1 ^[1]	2.197	3.553	4.862	5.772	6.058	0	0
2 ^[1]	1.852	3.171	4.378	5.041	5.290	250	59
3 ^[1]	2.320	3.909	5.240	6.131	6.435	1.196	177
4 ^[1]	2.975	5.010	6.823	7.984	8.380	3.370	397
5 ^[1]	2.561	4.287	5.838	6.832	7.170	4.610	451
5 ^[4]	1.917	3.210	4.371	5.115	5.368	3.451	Prämienrückstellung
CL-Faktoren	neu	1,674302	1,361736	1,170220	1,049595	9.426	Schadenrückstellung

Tabelle 15: aktualisiertes Abwicklungsdreieck für das erste Quartal

Exemplarische Erläuterung:

$$3.171 = \alpha^{[1]} \times 3.470 + \beta^{[1]} \times 3.071 = 0,25 \times 3.470 + 0,25 \times 3.071$$

Exemplarische Erläuterung:

$$1.917 = 2.556 \times \beta^{[1]} = 2.556 \times 0,75$$

Exemplarische Erläuterung:

$$5240 = \alpha^{[1]} \times 6.813 + \beta^{[1]} \times 4.715 = 0,25 \times 6.813 + 0,25 \times 4.715$$

IV. Quartalsverschiebungen

IV.1. Nicht-Rentenfälle

	Abwicklungsperiode					Geschätzter Zuwachs über 4 Quartale	Beobachteter Zuwachs 2. Quartal
Anfallperiode	0	1	2	3	4		
$0^{[4]} = 1^{[0]}$	2.334	3.714	5.061	6.058	6.361	0	0
$1^{[4]} = 2^{[0]}$	1.784	3.071	4.265	4.913	5.133	220	110
$2^{[4]} = 3^{[0]}$	2.055	3.470	4.715	5.451		736	368
$3^{[4]} = 4^{[0]}$	3.113	5.225	6.851			1.626	813
$4^{[4]} = 5^{[0]}$	2.562	4.476				1.914	957
$5^{[4]}$	2.630					2.630	1.315
CL-Faktoren alt		1,667026	1,369186	1,176389	1,050017		

Tabelle 16: Ergänzung des Dreiecks um die geschätzte Diagonale 2. Quartal

Exemplarische
Erläuterung:
 $6.851 = 5.225 + 1.626$

Exemplarische
Erläuterung:
 $5.133 = 4.913 + 220$

Exemplarische
Erläuterung:
 $220 = 110 / \alpha^{[2]} = 110 \times 2$

IV. Quartalsverschiebungen

IV.1. Nicht-Rentenfälle

	Abwicklungsperiode				Neue Rückstellung	Beobachteter Zuwachs 2. Quartal	
Anfallperiode	0	1	2	3	4		
1 ^[2]	2.059	3.393	4.663	5.486	5.747	0	0
2 ^[2]	1.920	3.271	4.490	5.182	5.429	247	110
3 ^[2]	2.584	4.346	5.783	6.740	7.061	1.278	368
4 ^[2]	2.838	4.851	6.580	7.669	8.034	3.184	813
5 ^[2]	2.596	4.380	5.942	6.923	7.255	4.659	957
5 ^[4]	1.315	2.219	3.010	3.508	3.675	2.360	Prämienrückstellung
CL-Faktoren	neu	1,687340	1,356523	1,165465	1,047671	9,368	Schadenrückstellung

Tabelle 17: aktualisiertes Abwicklungsdreieck für das zweite Quartal

Exemplarische Erläuterung:

$$3.271 = \alpha^{[2]} \times 3.470 + \beta^{[2]} \times 3.071 = 0,5 \times 3.470 + 0,5 \times 3.071$$

Exemplarische Erläuterung:

$$1.315 = 2.630 \times \beta^{[2]} = 2.630 \times 0,5$$

Exemplarische Erläuterung:

$$5.783 = \alpha^{[2]} \times 6.851 + \beta^{[2]} \times 4.715 = 0,5 \times 6.851 + 0,5 \times 4.715$$

IV. Quartalsverschiebungen

IV.2. Rentenfälle

Für Rentenfälle lässt sich eine analoge Vorgehensweise implementieren, indem man die sukzessiven Sterbewahrscheinlichkeiten je Quartal k ähnlich mittelt wie bei den Abwicklungsdreiecken:

$$q_z^{[k]} = \alpha^{[k]} q_{z+1} + \beta^{[k]} q_z$$

für alle Alter z unterhalb des Endalters, mit den Gewichten $\alpha^{[k]} = k / 4$ und $\beta^{[k]} = 1 - \alpha^{[k]} = 1 - k / 4$. Für das Endalter z wird stets $q_z^{[k]} = 1$ gesetzt. Für $k = 0$ ergeben sich damit die ursprünglichen Sterbewahrscheinlichkeiten, für $k = 4$ die um ein Jahr verschobenen Sterbewahrscheinlichkeiten.

IV. Quartalsverschiebungen

IV.2. Rentenfälle

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch für den Stichtag Dezember 2014 die entsprechenden um **ein Quartal** verschobenen Berechnungen der zukünftigen undiskontierten Best Estimates für eine weibliche Person des Jahrgangs 1945 (d.h. mit dem versicherungstechnischen Alter 70 im Jahr 2015), bei einem fiktivem jährlichen Zahlbetrag in Höhe von $Z = 10.000 \text{ €}$.

Jahr	Alter	$q_y^{[1]}$	$p_y^{[1]}$	${}_k p_y^{[1]}$	$\Delta({}_k p_y^{[1]})$	Best Estimate
2015	70	0,011617	0,988383	0,988383	0,011617	9.941,92 €
2016	71	0,012228	0,987772	0,976297	0,012086	9.823,40 €
2017	72	0,012932	0,987068	0,963672	0,012626	9.699,84 €
2018	73	0,013740	0,986261	0,950431	0,013240	9.570,51 €
2019	74	0,014655	0,985345	0,936502	0,013929	9.434,67 €
2020	75	0,015697	0,984303	0,921802	0,014701	9.291,52 €
2021	76	0,016893	0,983107	0,906230	0,015572	9.140,16 €
2022	77	0,018270	0,981731	0,889674	0,016556	8.979,52 €
2023	78	0,019868	0,980133	0,871998	0,017676	8.808,36 €
2024	79	0,021738	0,978262	0,853042	0,018955	8.625,20 €
2025	80	0,023945	0,976055	0,832616	0,020426	8.428,29 €

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

IV. Quartalsverschiebungen

IV.2. Rentenfälle

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch für den Stichtag Dezember 2014 die entsprechenden um **ein Quartal** verschobenen Berechnungen der zukünftigen undiskontierten Best Estimates für eine weibliche Person des Jahrgangs 1945 (d.h. mit dem versicherungstechnischen Alter 70 im Jahr 2015), bei einem fiktivem jährlichen Zahlbetrag in Höhe von $Z = 10.000 \text{ €}$.

		:	:	:	:	:	
2060	115	0,250283	0,749717	0,004271	0,001426	49,84 €	
2061	116	0,256179	0,743821	0,003177	0,001094	37,24 €	
2062	117	0,262020	0,737980	0,002344	0,000832	27,61 €	
2063	118	0,267803	0,732198	0,001717	0,000628	20,30 €	
2064	119	0,273535	0,726466	0,001247	0,000470	14,82 €	
2065	120	0,458352	0,541649	0,000675	0,000572	9,61 €	
2066	121	1,000000	0,000000	0,000000	0,000675	3,38 €	
$e_y^{[1]}$	20,36	Jahre			Rückstellung	208.585,57 €	$= (e_y + 1/2) \times 10.000 \text{ €}$

Tabelle 21: Berechnung des undiskontierten Best Estimate für einen Rentenfall bei Verschiebung um ein Quartal

IV. Quartalsverschiebungen

IV.2. Rentenfälle

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch für den Stichtag Dezember 2014 die entsprechenden um **drei Quartale** verschobenen Berechnungen der zukünftigen undiskontierten Best Estimates für eine weibliche Person des Jahrgangs 1945 (d.h. mit dem versicherungstechnischen Alter 70 im Jahr 2015), bei einem fiktivem jährlichen Zahlbetrag in Höhe von $Z = 10.000$ €.

Jahr	Alter	$q_y^{[3]}$	$p_y^{[3]}$	${}_k p_y^{[3]}$	$\Delta({}_k p_y^{[3]})$	Best Estimate
2015	70	0,011911	0,988089	0,988089	0,011911	9.940,45 €
2016	71	0,012567	0,987433	0,975671	0,012418	9.818,80 €
2017	72	0,013323	0,986677	0,962673	0,012999	9.691,72 €
2018	73	0,014183	0,985818	0,949020	0,013653	9.558,46 €
2019	74	0,015158	0,984842	0,934635	0,014385	9.418,27 €
2020	75	0,016274	0,983726	0,919425	0,015210	9.270,30 €
2021	76	0,017555	0,982445	0,903284	0,016141	9.113,54 €
2022	77	0,019037	0,980964	0,886089	0,017195	8.946,87 €
2023	78	0,020763	0,979238	0,867691	0,018397	8.768,90 €
2024	79	0,022794	0,977206	0,847913	0,019778	8.578,02 €
2025	80	0,025192	0,974808	0,826553	0,021360	8.372,33 €

: : : : :

IV. Quartalsverschiebungen

IV.2. Rentenfälle

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch für den Stichtag Dezember 2014 die entsprechenden um **drei Quartale** verschobenen Berechnungen der zukünftigen undiskontierten Best Estimates für eine weibliche Person des Jahrgangs 1945 (d.h. mit dem versicherungstechnischen Alter 70 im Jahr 2015), bei einem fiktivem jährlichen Zahlbetrag in Höhe von $Z = 10.000 \text{ €}$.

		:	:	:	:	:	
2060	115	0,253238	0,746762	0,003708	0,001258	43,37 €	
2061	116	0,259107	0,740893	0,002748	0,000961	32,28 €	
2062	117	0,264917	0,735083	0,002020	0,000728	23,84 €	
2063	118	0,270676	0,729325	0,001473	0,000547	17,46 €	
2064	119	0,276380	0,723621	0,001066	0,000407	12,69 €	
2065	120	0,819451	0,180550	0,000192	0,000873	6,29 €	
2066	121	1,000000	0,000000	0,000000	0,000192	0,96 €	
$e_y^{[2]}$	19,98	Jahre			Rückstellung	204.779,57 €	$= (e_y + 1/2) \times 10.000 \text{ €}$

Tabelle 23: Berechnung des undiskontierten Best Estimate für einen Rentenfall bei Verschiebung um drei Quartale

V. Sonstige Berechnungen

V. Sonstige Berechnungen

Zur Berücksichtigung des Rückversicherungs-Ausfallrisikos ist gemäß der Delegierten Verordnung 2015/35 der EU-Kommission, Artikel 42 der Best Estimate der **einforderbaren Beträge** anzupassen. Dazu wird die folgende Anpassungsformel verwendet:

$$Adj_{CD} = -\max\left(0, 5 \cdot \frac{PD}{1 - PD} \cdot Dur_{mod} \cdot BE_{rec}; 0\right).$$

Dabei bezeichnet PD die **Ausfallwahrscheinlichkeit** des Rückversicherers in den folgenden 12 Monaten, Dur_{mod} die **modifizierte Duration** der einzelnen Zahlungsströme der einforderbaren Beträge und BE_{rec} den Best Estimate der einforderbaren Beträge.

V. Sonstige Berechnungen

Durationsansatz bei einer flachen (fristigkeitsunabhängigen) Zinsstrukturkurve:

Das Durationskonzept geht aus von einer unmittelbaren Änderung der Zinsstruktur in $t = 0$, wobei auch die Zinsstruktur nach Änderung weiterhin flach ist. Diese Vorgehensweise läuft dem Grunde nach auf eine Sensitivitätsanalyse bei Änderung des Diskontierungsfaktors hinaus. Für den Barwert EZ eines Zinstitels mit m Zahlungen Z_i zu den Zeitpunkten t_i gilt dann zunächst allgemein bei flacher Zinsstruktur der Höhe r

$$EZ = \sum_{i=1}^m \frac{Z_i}{(1+r)^{t_i}}.$$

Die **absolute Duration** ist definiert als negative infinitesimale Änderung des Barwertes nach dem Zins:

$$Dur_{abs}(Z) = -\frac{\partial EZ}{\partial r} = \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^m \frac{t_i Z_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{t_i Z_i}{(1+r)^{t_i+1}}.$$

V. Sonstige Berechnungen

Durationsansatz bei einer flachen (fristigkeitsunabhängigen) Zinsstrukturkurve:

Das Durationskonzept geht aus von einer unmittelbaren Änderung der Zinsstruktur in $t = 0$, wobei auch die Zinsstruktur nach Änderung weiterhin flach ist. Diese Vorgehensweise läuft dem Grunde nach auf eine Sensitivitätsanalyse bei Änderung des Diskontierungsfaktors hinaus. Für den Barwert EZ eines Zinstitels mit m Zahlungen Z_i zu den Zeitpunkten t_i gilt dann zunächst allgemein bei flacher Zinsstruktur der Höhe r

$$EZ = \sum_{i=1}^m \frac{Z_i}{(1+r)^{t_i}}.$$

Die **modifizierte Duration** ist definiert als negative infinitesimale Änderung des Logarithmus des Barwertes nach dem Zins:

$$Dur_{mod}(Z) = -\frac{\partial \ln(EZ)}{\partial r} = -\frac{1}{EZ} \cdot \frac{\partial EZ}{\partial r} = \frac{1}{EZ} \sum_{i=1}^m \frac{t_i Z_i}{(1+r)^{t_i+1}}.$$

V. Sonstige Berechnungen

Unter Solvency II ist die Zinsstruktur allerdings abhängig von der zeitlichen Länge der Diskontierung, also vom Zeitpunkt, zu dem eine künftige Zahlung fällig wird. Bezeichnet r_i den (jährlichen) Zinssatz zum künftigen Jahr i , so ist die **modifizierte Duration** gegeben durch

$$Dur_{mod}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{i \cdot Z_i}{(1+r_i)^i}}{\sum_{i=1}^m \frac{Z_i}{(1+r_i)^{i+1}}}.$$

Sofern Zahlungsströme unterjährig zu erfassen sind, kann man die Formel auch wie folgt ansetzen:

$$Dur_{mod}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{(i-0,5) \cdot Z_i}{(1+r_i)^{(i-0,5)}}}{\sum_{i=1}^m \frac{Z_i}{(1+r_i)^{(i+0,5)}}}.$$

V. Sonstige Berechnungen

Gemäß der Auslegungsentscheidung der BaFin vom 4.12.2015 zur *Bewertung der einforderbaren Beträge aus Rückversicherungsverträgen und gegenüber Zweckgesellschaften* sind bei den einforderbaren Beträgen neben der Differenz aus den Brutto- und Netto-Zahlungsströmen auch die Rückversicherungsprämien im aktuellen Jahr anzurechnen. Bei auskömmlicher Tarifierung des Rückversicherers können sich dann allerdings rein formelmäßig sowohl negative Durationen wie negative Best Estimates ergeben, was keinen Sinn macht. In diesem Fall ist der Anpassungsterm gleich Null zu setzen. Dies betrifft aber nur die Neufälle, weil bei den Altfällen keine Rückversicherungsprämien mehr anzusetzen sind.

V. Zusammenfassung und Fazit

V. Zusammenfassung und Fazit

Die konkrete Ausgestaltung der Versicherungsmathematischen Funktion ist **flexibel**, aber mathematisch außerordentlich **anspruchsvoll**. Die im Gesetz und in der Delegierten Verordnung festgelegten Aufgaben lassen sich nicht immer in eindeutiger Weise durchführen, da sie oft mit **unbestimmten Rechtsbegriffen** beschrieben sind (Angemessenheit, Hinlänglichkeit, Verlässlichkeit, Qualität, homogene Risikogruppe, ...). Eine wissenschaftlich stringente Überprüfung der „Angemessenheit“ einer Methode (z.B. des Chain Ladder Verfahrens) ist zweifelhaft, da eine genaue Überprüfung der den Verfahren zu Grunde liegenden mathematischen Modellvoraussetzungen in der Praxis grundsätzlich unmöglich ist, weil die Realität erheblich komplexer als jedes noch so ausgefeilte mathematische Modell ist.

Fazit:

Die konkrete Ausgestaltung der Versicherungsmathematischen Funktion kann nur **pragmatisch** gesehen werden und muss im Einzelfall ggf. mit der Aufsichtsbehörde abgestimmt werden.

V. Zusammenfassung und Fazit

Literaturauszug:

P. Albrecht, M. Huggenberger (2015): *Finanzrisikomanagement*. Methoden zur Messung, Analyse und Steuerung finanzieller Risiken. Schäffer Poeschel Verlag, Stuttgart.

C. Bennemann, L. Oehlenberg, G. Stahl (2011): *Handbuch Solvency II*. Von der Standardformel zum Internen Modell, vom Governance-System zu den MaRisk VA. Schäffer Poeschel Verlag, Stuttgart.

H. Gründl, M. Kraft (2015): *Solvency II – eine Einführung*. Grundlagen der neuen Versicherungsaufsicht. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

K.M. Ortmann (2016): *Praktische Lebensversicherungsmathematik*. 2. Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden.

M. Radtke, K.-D. Schmidt (2012): *Handbuch zur Schadenreservierung*. 2. Aufl., Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.